



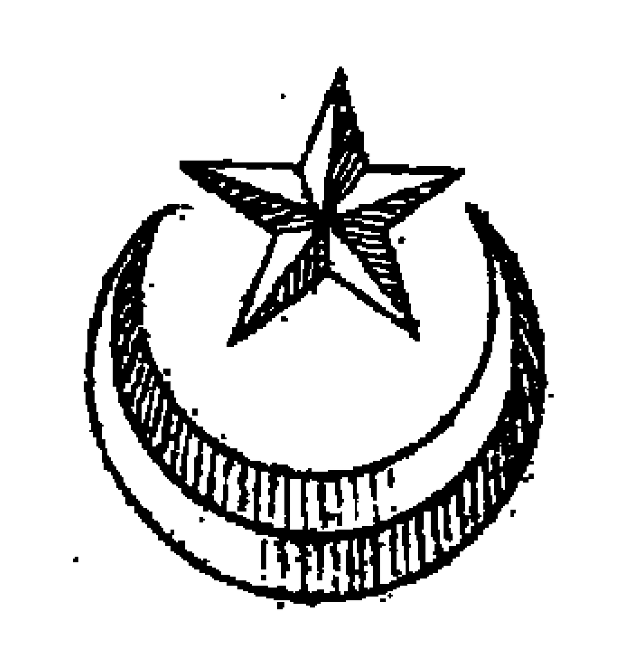
دروس الديناميك

الجارى تدريسها لتلامذة السنة الثانية من مدرسة المهندسخانه الخديويه

بمعرفة
حضرة أحمد بك ذهنى
ناظر المدرسة

على حسب الجداول التفصيلية للعلوم الجارى تدريسها بمدرسة المهندسخانه الخديوية الصادر عليها قرار نظارة المعارف العمومية فى ٣٠ اغسطس سنة ١٨٩٤ المجعولة ذيلا لقانون المدرسة المذكورة المصدق عليه من مجلس النظار فى ٨ يونية سنة ١٨٩٢

﴿ طبع ﴾
﴿ فى مدرسة المهندسخانه الخديوية بسراى درب الجماميز سنة ١٨٩٦ الافرنكيه ﴾



بسم الله الرحمن الرحيم

فى السينماتيك

الحركات المختلفة

تعاريف

والسينماتيك هو دراسة الحركات بقطع النظر عن القوى التى تحدثها

ويعتبر فيه الطريق الذى يتبعه المحرك والمسافة التى يقطعها والزمن المستعمل لقطعها

ويعتبر فى هذا العلم الثانية وحدة للزمن

خط السير ـ يسمى خط السير الخط المرسوم بنقطة مادية متحركة

والحركة تكون مستقيمة اذا كان خط السير مستقيما ومنحنية اذا كان خط السير منحنيا ودائرية اذا كان خط السير محيط دائرة

ولأجل ان تكون حركة متحرك معينة يقتضى أولا معرفة خط السير وثانيا معرفة وضع المتحرك فى كل لحظة على خط سيره

قانون الحركة ـ قانون الحركة هو الارتباط الواقع بين المسافة والزمن

وايضاح هذا القانون بالطريقة الجبرية عبارة عن معادلة الحركة وايضاحه بخط عبارة عن بيانه بالطريقة الرسمية

نقطة الأصل ـ تسمى نقطة أصل المسافات النقطة من خط السير التى يبتدأ منها بحساب المسافات الناتجة من قانون الحركة

ومبدأ الازمان هو اللحظة التى تبتدئ منها الازمان المعتبرة

مثال معادلة الحركة ـ لنفرض ان قانون حركة متحرك معين بالمعادلة

$$\text{هـ} = ٥\,\text{ن} - ٢\,\text{ن}^{٢}$$

وان خط السير هو ا ب (شكل ١) ونقطة و منه هى نقطة أصل المسافات فحينئذ للحصول على وضع المتحرك فى نهاية

فى نهاية ثانية مثلا يجعل فى المعادلة السابقة ز = ١ فيحدث

م = ٣

وحينئذ يؤخذ على اب بالابتدا من نقطة و طول مساوٍ الى ثلاث وحدات فنجد نقطة م التى هى عبارة عن الوضع المطلوب ايجاده

وفى نهاية ٣ يكون م = − ٣

فحينئذ يؤخذ بالابتدا من نقطه و فى الجهة المضادة للأولى ثلاث وحدات ويكون مَ هى وضع المتحرك وبمثل ذلك يمكن الحصول على وضع المتحرك فى لحظة ما حيثما اتفق

بيان الحركة بالطريقة الرسمية — للحصول على المنحنى البيانى للحركة يؤخذ على محور السينات المسمى ايضا بمحور الازمان أطوال مناسبة للازمان المعتبرة ثم يؤخذ على الاحداثيات الرأسية المقابلة لتلك الازمان أطوال مناسبة للمسافات التى قطعها المتحرك بالابتدا من نقطة الأصل فى اللحظات المختلفة ثم يجمع النقط المتحصلة بخط متصل فهذا الخط يكون هو الخط البيانى للحركة الذى يسمى أيضا بمنحنى المسافات

فالمنحنى المرسوم فى (ش ٢) المتحصل بناء على ماذكر يدل على الحركة التى معادلتها هى المعادلة المذكورة فى المثال السابق وهى م = ٥ ز − ٢ ز٢ فيشاهد أنه فى مبدأ الزمن كان المتحرك فى نقطة اصل المسافات وأنه متباعد عنها فى نهاية ثانية وربع ويكون فى هذه الحالة على بعد د ذ وهو بعده الاعظم ما يمكن وبعد ذلك فالمتحرك يقرب من نقطة الأصل التى يأتى فيها فى نهاية ثانيتين ونصف ثم يبعد عنها الى ما لانهاية فى الجهة العكسية والحصول بواسطة المنحنى البيانى للحركة على وضع المتحرك فى لحظة معينة ولتكن فى نهاية ٢ مثلا يؤخذ على محور الازمان ا حَ = ٢ فمقدار الاحداثى الرأسى حَ حَ يكون هو بعد المتحرك عن نقطة الأصل ثم يؤخذ هذا البعد على خط السير بالابتداء من نقطة و فى الجهة الموجبة أو السالبة على حسب اشارة الاحداثى الرأسى فالنقطة المتحصلة حينئذ تكون هى وضع المتحرك فى اللحظة المعتبرة

تنبيهات

الأول — يجب الاحتراس من الالتباس بين خط السير وبين الخط البيانى للحركة اذ أن الخط البيانى للحركة يبقى بعينه سواء كانت مستقيمة أو منحنية

الثانى — يمكن الحصول على الخط البيانى لقانون الحركة بدون معلومية معادلتها بواسطة عمل عدة تجارب بها يعين وضع المتحرك فى ازمان محدودة وحينئذ يتحصل على عدة نقط تكفى لرسم المنحنى بضبط كاف كلما كانت الاوضاع المرصودة كثيرة ومنتخبة جيدا

الثالث أن مقياسى الازمان والمسافات اختياريان فحينئذ اذا اتفق على بيان وحدة الزمن ووحدة المسافات

بطول واحد فأن المقياسين يتحدان وتقاس اذن الاحداثيات الافقية والرأسية بواسطة مقياس مشترك ولكن اذا كان المتر والثانية مبينين بطولين مختلفين فالمقياسان يختلفان عن بعضهما
وحينئذ يلزم الأعتناء بتقدير الاحداثيات الافقية بمقياس الازمان والاحداثيات الرأسية بمقياس المسافات على التناظر

انواع الحركات

قد شاهدنا فيما تقدم أنه بناء على جنس خط السير قد تكون الحركات مستقيمة أو منحنية لكن هذه الحركات تكون منتظمة أو متغيرة بحسب الارتباط الواقع بين المسافة المقطوعة والزمن المستعمل لقطعها أعنى بحسب قانون الحركة

فى التحرك المنتظم

تعريف — التحرك المنتظم — التحرك المنتظم هو الذى فيه يقطع المتحرك مسافات متساوية فى ازمان متساوية مهما كان صغر تلك الازمان أعنى أنه فى التحرك المنتظم تكون المسافات المقطوعة مناسبة للازمان المستعملة لقطعها
السرعة — السرعة فى التحرك المنتظم هى المسافة المقطوعة فى وحدة الزمن

معادلة التحرك المنتظم

يوجد فى هذا التحرك حالتان — الأولى — أن يكون الوضع الابتدائى للمتحرك منطبقا على نقطة اصل المسافات وحينئذ اذا كان مبدأ الأزمان مطابقا لمبدأ المسافات ورمز بحرف ه للمسافة المقطوعة فى مدة الزمن ز وبحرف ع للسرعة فأنه بناء على تعريف التحرك المنتظم يكون

$$ه = ع ز \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

الثانية — ان يكون الوضع الابتدائى مغايرا لنقطة اصل المسافات وفى هذه الحالة اذا كان المتحرك فى مبدأ الزمن على بعد ا من نقطة الأصل و ورمز بحرف ه لبعده عن نقطة الاصل المذكورة فى نهاية الزمن ز يكون ه — ا هى المسافة المقطوعة فى مدة الزمن ز وحينئذ اذا كانت السرعة هى ع فبناء على تعريف التحرك المنتظم يكون

$$ه - ا = ع ز \quad \ldots\ldots \quad (2) \qquad \text{ومنه يحدث}$$

$$ه = ا + ع ز \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

(تنبيهان) الأول — من القانون (٢) يحدث

$$ع = \frac{ه - ا}{ز}$$

أعنى انه يمكن تعريف السرعة بتعريف آخر وهو أنه فى التحرك المنتظم تكون السرعة عبارة عن النسبة الكائنة بين المسافة المقطوعة والزمن المستعمل لقطعها
الثانى — انه فى التحرك المنتظم تكون السرعة ثابتة وأن المسافة هى الدالة بدرجة أولى بالنسبة للزمن

بيان التحرك المنتظم بالطريقة الرسمية

قانون التحرك المنتظم يمكن بيانه بخط مستقيم وفى ذلك حالتان
الاولى — ان يكون المتحرك فى نقطة أصل المسافات فى مبدأ الزمن وفى هذه الحالة يكون الخط المحوى الدال على قانون التحرك

المتحرك المنتظم هو خط مستقيم

لأنه بناء على التعريف الثاني للسرعة يكون (شـ ٣)

$$\frac{ب بَ}{ا بَ} = \frac{ح حَ}{ا حَ} = \frac{ء ءَ}{ا ءَ}$$

وحينئذ تكون المثلثات القائمة الزوايا ا ب بَ ، ا ح حَ ، ا ء ءَ متشابهة وتكون الزوايا ب ا بَ ، ح ا حَ ، ء ا ءَ متساوية وعليه فتكون النقط ب ، ح ، ء .... الخ موجودة على مستقيم واحد يدل على قانون التحرك المنتظم

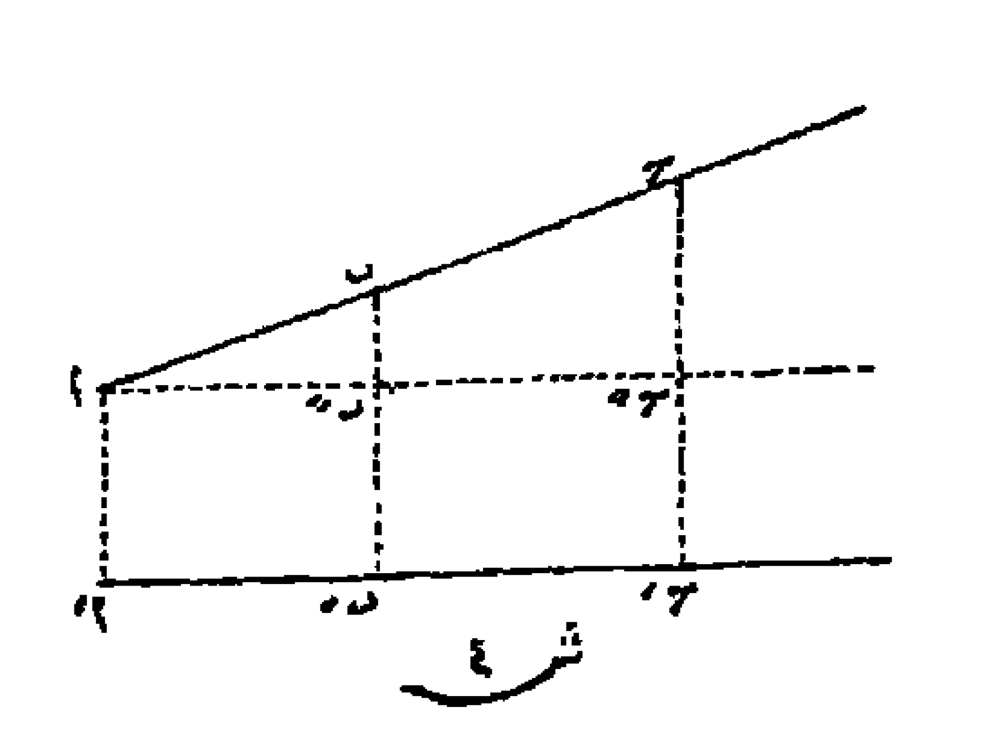
شـ ٣

الثانية — ان لا يكون المتحرك في نقطة أصل المسافات في مبدأ الزمن وفي هذه الحالة نفرض أنه في مبدأ الزمن يكون المتحرك على بعد ا اَ (شـ ٤) من نقطة أصل المسافات وحينئذ

اذا مددنا من نقطة ا مستقيما موازيا لمحور الازمان يحدد على الأحداثيات الرأسية اجزاء بَ ب ، حَ ح ، .... الخ دالة على المسافات المقطوعة في الازمنة ا بَ ، ا حَ ، .... الخ

ويؤل الأمر حينئذ الى الحالة السابقة

وعلى ذلك فيكون الخط المستقيم ا ء دالا على تحرك منتظم فيه ا اَ هي المسافة الابتدائية


شـ ٤

فاذا كانت الازمان والمسافات منسوبة الى مقياس واحد فسرعة المتحرك المنتظم تتعين بظل الزاوية الواقعة بين المستقيم البياني للحركة ومحور الازمان فاذا كان المطلوب تعيين سرعة المتحرك المنتظم المبين بالمستقيم ا ح (شـ ٥)

فأنه بناء على تشابه المثلثات يكون

$$\frac{ب بَ}{ا بَ} = \frac{ح حَ}{ا حَ} = ع$$

واذا رمزنا بحرف ا للزاوية الواقعة بين المستقيمين ا ح ، ا حَ يحدث

$$\frac{ب بَ}{ا بَ} = \text{طا}\ ا \quad \text{ومنها}$$

$$ع = \text{طا}\ ا$$

شـ ٥

تنبيهات — الأول — لأجل الحصول على مقدار هذا الظل يؤخذ ا بَ مساويا للوحدة ثم يقاس ب بَ فالعدد المتحصل يكون مساويا الى طا ا

الثاني — مهما كانت المقاييس المختلفة للازمان وللمسافات فان سرعة المتحرك المنتظم تكون مساوية للمعامل الزاوي لمستقيمها البياني والمعامل الزاوي لمستقيم منسوب لمحوري احداث هو خارج قسمة فرق احداثيي موازيين لمحور المصادات مقدرا بمقياس المسافات على فرق الاحداثيين الموجودين على محور السينات المقابلين لهما مقدرا بمقياس الازمان والمعامل الزاوي لا يصير مساويا لظل الميل الا اذا كان المحوران متعامدين

وكان المقياسان محددين

وقد يرسم أحيانا الخط البياني للسرعة بأن يؤخذ على محور الأحداثيات الافقية أبعاد مناسبة للأزمان وعلى الاحداثيات الرأسية أطوال مناسبة للسرع المقابلة لها

وحيث ان السرعة في المتحرك المنتظم ثابتة فخطها البياني يكون موازيا الى محور الاحداثيات الافقية والطول ا أ يكون دالا على مقدار السرعة (ش ٦)

الحركة المستقيمة المتغيرة

تعريف – المتحرك المتغير هو الذى لا تكون فيه المسافات المقطوعة مناسبة للازمان المستعملة لقطعها

السرعة المتوسطة – السرعة المتوسطة هي سرعة الحركة المنتظمة التي يستعملها المتحرك في المدة المفروضة لقطع نفس المسافة التي قطعها بحركة متغيرة

فاذا فرض متحرك م (ش ٧) يتحرك على مستقيم اب بحركة متغيرة وفرض انه في اثناء الزمن ى قطع المسافة م مَ فسرعته المتوسطة تكون $\frac{م مَ}{ى}$

السرعة في لحظة معينة – السرعة في لحظة معينة هي النهاية التي تميل اليها نسبة ازدياد المسافة الى ازدياد الزمن حتى صغر ازدياد الزمن بلا نهاية

فاذا رمز بحرف هـ للمسافة المقطوعة في نهاية الزمن ز وبالحرف هَ للمسافة المقطوعة في نهاية الزمن ز + ى فالفرق هَ – هـ يكون هو ازدياد المسافة في مدة المسافة الزمنية ى وتكون النسبة $\frac{هَ - هـ}{ى}$ هي السرعة المتوسطة في هذه المسافة الزمنية ومتى نقص ازدياد الزمن ى ومال نحو الصفر فان ازدياد المسافة هَ – هـ ينقص ويميل ايضا نحو الصفر لكن النسبة $\frac{هَ - هـ}{ى}$ تميل نحو نهاية معينة وتسمى بالسرعة في نهاية الزمن ى بالضبط

وقد يمكن ان يقال أيضا ان السرعة في نهاية الزمن ز هي النهاية التي تميل اليها السرعة المتوسطة بالابتداء من الزمن ز حينما تنقص المدة الزمانية المفروضة بلا نهاية

تنبيه – واذا قسم الزمن الذى فيه حصلت الحركة المتغيرة الى عدد كبير من الاقسام المتساوية التي يقطع المتحرك في كل منها بانتظام نفس المسافة التي قطعها بحركة متغيرة فان الحركة الجديدة تختلف قليلا عن الحركة المتغيرة كلما كانت اللحظات المذكورة كثيرة جدا واذا كانت تلك اللحظات صغيرة بقدر ما يراد فان الحركتين يكونان متساويتين وبناء على ذلك يشاهد ان سرعة الحركة المتغيرة في لحظة معينة عبارة عن سرعة الحركة المنتظمة الجزئية المقابلة للحظة المذكورة

تعيين السرعة

سنشاهد كيفية الحصول على مقدار السرعة في لحظة ما بعد معرفة قانون الحركة اما بمعادلة أو بمنحنى

الأول

الأول - اذا كان قانون الحركة معلوما بمعادلة وكان المطلوب تعيين السرعة في نهاية الزمن ن لحركة معلومة بمعادلة هـ = ك ن² الذى فيها هـ رمز للمسافة المقطوعة ، ك مقدار ثابت حيثما اتفق ، ن الزمن المفروض فانه في نهاية الزمن ن + ى تكون المسافة المقطوعة هي

$$\text{هَ} = \text{ك}\,(\text{ن} + \text{ى})^2 = \text{ك ن}^2 + ٢\,\text{ك ن ى} + \text{ك ى}^2$$

وحينئذ تكون المسافة المقطوعة في مدة الزمن ى هي

$$\text{هَ} - \text{هـ} = ٢\,\text{ك ن ى} + \text{ك ى}^2$$

واذا قسم طرفا المعادلة على ى يتحصل على السرعة المتوسطة في مدة الزمن ى هكذا

$$\frac{\text{هَ} - \text{هـ}}{\text{ى}} = ٢\,\text{ك ن} + \text{ك ى}$$

واذا فرض أن ى تنقص شيئا فشيئا وتميل نحو الصفر فالحد ك ى يميل نحو الصفر أيضا وعند النهاية يكون

$$\text{نها}\ \frac{\text{هَ} - \text{هـ}}{\text{ى}} = ٢\,\text{ك ن}$$

وهي السرعة في نهاية الزمن ن وحينئذ اذا رمز لها بالحرف ع يكون

$$\text{ع} = ٢\,\text{ك ن}$$

وثانيا اذا كان قانون الحركة معلوما بمنحنٍ وكان المطلوب تعيين السرعة في نهاية الزمن ن لحركة معلومة بمنحنٍ احداثياته الرأسية والافقية منسوبة لمقياس واحد

يؤخذ على محور الافقيات البعد اب مساويا للزمن ن والبعد احَ مساويا لزمن أكبر من ن وحينئذ فالمتحرك يقطع المسافة حـ ء اثناء زيادة الزمن ب حَ وسرعته المتوسطة في هذه المدة تكون (شـ ٨)

$$\frac{\text{حـ ء}}{\text{ب حَ}} = \frac{\text{حـ ء}}{\text{ب ء}} = \text{طا حـ ب ء}$$

لكن اذا نقص الزمن ب حَ فان النقطة حـ تقرب شيئا فشيئا من النقطة ب والسرعة المتوسطة لاتزال مبينة بظل الزاوية المتكونة بين الوتر ب حـ والمستقيم ب ء و في النهاية عند انطباق النقطة حـ على ب فالقاطع ب حـ يصير مماسا في نقطة ب وتكون السرعة في اللحظة المفروضة مبينة بظل زاوية ـه ب ء أو طا ٢ *

شـ ٨

(*) ملحوظة - ولأجل الحصول على مقدار هذا الظل يؤخذ بَ حَ = الوحدة ويمد الاحداثي الرأسي حَ ء حـ الى نقطة هـ التى هي نقطة تقابله مع ب ـه فطول ء هـ يكون مساويا الى طا ٢

وحينئذ اذا كانت الأزمان والمسافات مبينة بمقياس واحد فالسرعة فى لحظة معينة تكون مبينة بظل الزاوية الواقعة بين محور الازمان وبين المماس للمحنى فى النقطة المقابلة للحظة المذكورة

تنبيه – واذا لم تكن المسافات والازمان منسوبة لمقياس واحد فأن السرعة فى اللحظة ز تكون متناسبة الى $\text{طا}\,\text{؟}$ فقط لأنه اذا كان $\frac{1}{\text{ك}}$ هو العدد الذى يلزم ان تضرب فيه الاحداثيات الافقية كى تكون وحدة الازمان مبينة بمقياس كوحدة المسافات فأن السرعة المتوسطة اثناء ازدياد الزمن المبين بالمستقيم تَ حَ تكون هى

$$\text{ح ء} : \frac{\text{تَ حَ}}{\text{ك}} = \text{ك}\,\frac{\text{ح ء}}{\text{تَ حَ}} = \text{ك طا خ ت ء}$$

وحيث ان ك عدد ثابت فتكون السرعة فى اللحظة ز هى

$$\text{ع} = \text{ك طا ؟}$$

وبالمثل فى الازمان ز_1 ، ز_2 ..... الخ تكون السرع هى $\text{ع}_1 = \text{ك طا ؟}_1$ ، $\text{ع}_2 = \text{ك طا ؟}_2$ ..... الخ

واذن يكون

$$\text{ك} = \frac{\text{ع}}{\text{طا ؟}} = \frac{\text{ع}_1}{\text{طا ؟}_1} = \frac{\text{ع}_2}{\text{طا ؟}_2}$$

وعليه فالسرع تكون مناسبة للظلال المطابقة لها

ويمكن ان يقال أيضا انه فى جميع الأحوال تكون السرعة مساوية الى المعامل الزاوى لمماس الخط البيانى لقانون الحركة

تنبيه – قد شاهدنا فيما تقدم أن الحركة المتغيرة يمكن اعتبارها مركبة من حركات منتظمة ازمانها صغيرة بقدر ما يراد وسرعها مختلفة وحينئذ فكل جزء من الاجزاء المستقيمة المكونة للمحنى اح يكون هو المستقيم البيانى لاحد هذه الحركات الجزئية

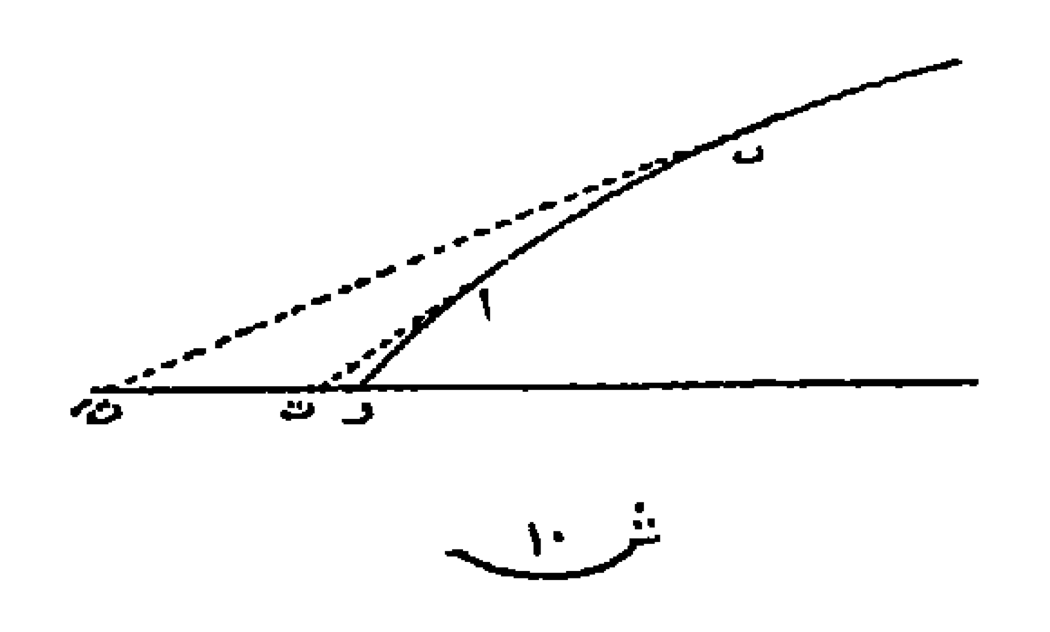
والمماس ت ت يكون هو الخط البيانى للحركة الجزئية المقابلة للنقطة م وعليه يكون طا؟ يدل على سرعة الحركة الجزئية المذكورة

الحركة العجلية

الحركة تكون عجلية متى اخذت السرعة فى الازدياد والمحنى البيانى لهذه الحركة يكون تحديبه متجها نحو الجهة الموجبة لمحور الازمان حيث أنه فى هذه الحالة تكون الزاوية ؟ آخذة فى الكبر بالاستمرار كما يشاهد من (ش ٩)

ش ٩

الحركة التقصيرية – الحركة تكون تقصيرية متى أخذت فى النقص وفى هذه الحالة يكون تقعير المحنى البيانى للمسافات متجها نحو الجهة الموجبة لمحور الازمان وأن الزاوية ؟ تأخذ فى النقص بالاستمرار كما يشاهد من (ش ١٠)



ش ١٠

الحركة الدورية ـ الحركة تكون دورية اذا اخذت السرعة بعد مسافات زمنية متساوية نفس المقادير التى كانت اخذتها من قبل والدور هو الزمن الذى يفصل اللحظات المتتالية التى فيها تأخذ السرعة نفس سلسلة المقادير والخط البيانى لقانون الحركة الدورية هو منحنٍ متموج ففى الحركة المبينة بالمنحنى و ا تكون السرعة ابتداء معدومة ثم تتزايد فى اثناء الزمن و أ شكل ١١ الذى فى نهايته تصل الى النهاية الكبرى ثم تتناقص فى مدة الزمن أ ت الذى فى نهايته تصير معدومة ثم تأخذ بعد ذلك نفس المقادير التى كانت اخذتها من قبل وحينئذ يكون الزمن و ت هو الدور والمستقيم و ب يدل على الحركة المنتظمة التى سرعتها هى السرعة المتوسطة فى مدة الدور وامثلة الحركات الدورية كثيرة منها حركة البندول وحركة مكبس آلة بخارية وحركة الارض حول الشمس و..... الخ ففى الحالتين الأولتين السرعة تنعدم مرتين فى الدور الواحد لتغير اشارتها وفى الحالة الثالثة السرعة تتغير بين نهايات متقاربة جدا وهذا هو السبب فى عدم تساوى الأيام الشمسية ويستعاض عادة الزمن الحقيقى بزمن متوسط فيه تكون الازمان متساوية (راجع علم القسموغرافيا)

فى الحركة المنتظمة التغير وسقوط الأجسام

تعريف ـ الحركة المنتظمة التغير هى التى تتغير فيها السرعة بكميات متساوية فى أزمنة متساوية فاذا تزايدت السرعة فالحركة تكون منتظمة العجلة واذا تناقصت السرعة فالحركة تكون منتظمة التقصير

العجلة ـ الكمية الثابتة التى تتغير فيها السرعة فى كل وحدة زمانية فى الحركة المنتظمة التغير تسمى بالعجلة والعجلة تكون موجبة فى الحركة العجلية وسالبة فى العجلة التقصيرية

قانون السرع

اذا رمز بالرمز عَ للسرعة الابتدائية أعنى لسرعة فى مبدأ الزمن ز وبالرمز و للعجلة بحيث أن السرعة تزداد فى كل وحدة زمنية بالكمية و فانها تزداد بالمقدار و ز فى مدة الزمن ز وحينئذ اذا رمزنا بحرف ع للسرعة فى نهاية الزمن ز يكون قانون السرع هو

ع = عَ + و ز

واذا كان الجسم خارجا من السكون فأن السرعة الأصلية تكون معدومة ويؤول قانون السرعة الى

ع = و ز

واذا كانت الحركة منتظمة التقصير فالعجلة تكون سالبة ويكون

ع = عَ − و ز

قانون المسافات

اذا كان المطلوب ايجاد المسافة المقطوعة بحركة منتظمة العجلة فى مدة الزمن ز بمتحرك سرعته الابتدائية عَ وعجلته و نقسم الزمن ز الى مسافات زمنية متساوية عددها ن وللاختصار نجعل ز/ن = ى فنرى أن السرع

في مبدأ كل من المسافات الزمانية المذكورة هي

$$ع_١ = ع$$
$$ع_٢ = ع + وى$$
$$ع_٣ = ع + ٢ وى$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$ع_م = ع + (م-١) وى$$

واذا اعتبرنا ان السرعة في كل من هذه المسافات الزمنية ثابتة فالمسافات المقطوعة تكون

$$ه_١ = ع_١ ى = ع ى$$
$$ه_٢ = ع_٢ ى = ع ى + وى^٢$$
$$ه_٣ = ع_٣ ى = ع ى + ٢ وى^٢$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$ه_م = ع_م ى = ع ى + (م-١) وى^٢$$

وحاصل جمع هذه المسافات وهو مج ه يكون مساويا الى

$$مج ه = م ع ى + \{ ١ + ٢ + ٣ + \cdots + (م-١) \} وى^٢$$

وبتعويض ى بمقدارها وهو $\frac{ز}{م}$ يحدث

$$مج ه = ع ز + \frac{١ + ٢ + ٣ + \cdots + (م-١)}{م^٢} وز^٢$$

وحينئذ كلما تتزايد م فالمسافة الزمانية ى تنقص ومجموع الحركات الجزئية المفروضة يقرب دائما من الحركة المنتظمة العجلة المذكورة وعند النهاية تتحد معها

وحينئذ للحصول على المسافة ه المقطوعة بحركة منتظمة العجلة في مدة الزمن ز يلزم أخذ نهاية المقدار السابق عند ازدياد م الى ما لا نهاية فيكون

$$ه = نها \left\{ ع ز + \frac{١ + ٢ + ٣ + \cdots + (م-١)}{م^٢} وز^٢ \right\}$$

ومنه يحدث
$$ه = ع ز + \tfrac{١}{٢} وز^٢$$

تنبيهات

الأول — في حالة ما تكون الحركة منتظمة التنقيص يكون

$$ه = ع ز - \frac{وز^٢}{٢}$$

الثاني — اذا كانت السرعة الابتدائية معدومة يكون $ع = ٠$ وحينئذ يكون

$$ه = \frac{وز^٢}{٢}$$

واذا رمزنا بحرفي ه و هَ للمسافتين المقطوعتين في مدة الزمنين ز و زَ يكون

$$ه = \frac{وز^٢}{٢} \quad ، \quad هَ = \frac{وزَ^٢}{٢}$$

ومنها

ومنها يحدث $\frac{ه}{ه'} = \frac{ن^٢}{ن'^٢}$

وحينئذ حينما يخرج المتحرك من السكون فالمسافات المقطوعة تكون مناسبة لمربعات الازمان المستعملة لقطعها

الثالث ـ اذا كان فى القانون ($ه = \frac{و ن^٢}{٢}$) $ن = ١$ يكون

$$ه = \frac{و}{٢} \quad \text{ومنه يحدث} \quad و = ٢ ه$$

أعنى أنه فى الحركة المنتظمة العجلة اذا خرج المتحرك من السكون فالعجلة تكون ضعف المسافة المقطوعة فى مدة الثانية الاولى

الرابع ـ يمكن وضع القانون

$$ه = \underset{.}{ع} ن + \frac{و ن^٢}{٢} \quad \text{بالصورة الآتية}$$

$$ه = \left(\underset{.}{ع} + \frac{و ن}{٢}\right) ن$$

ولكن $\underset{.}{ع} + \frac{و ن}{٢}$ أو $\underset{.}{ع} + و \frac{ن}{٢}$ عبارة عن السرعة فى منتصف الزمن $ن$ وحينئذ تكون المسافة المقطوعة بحركة منتظمة العجلة هى فى زمن معين عين المسافة التى يقطعها المتحرك بانتظام فى المدة المذكورة بسرعة مساوية للسرعة المقابلة لمنتصف الزمن $ن$

مسئلة

مامقدار السرعة التى اكتسبها متحرك قطع المسافة $ه$ بحركة منتظمة العجلة

لذلك يقال اذا عوض فى القانون

$$ه = \underset{.}{ع} ن + \frac{و ن^٢}{٢}$$

الزمن $ن$ بمقداره المستخرج من القانون

$$ع = \underset{.}{ع} + و ن \quad \text{أعنى بالمقدار}$$

$$ن = \frac{ع - \underset{.}{ع}}{و} \quad \text{يتحصل}$$

$$ه = \frac{\underset{.}{ع}(ع - \underset{.}{ع})}{و} + \frac{(ع - \underset{.}{ع})^٢}{٢ و}$$

ومنه يحدث

$$ه = \frac{ع - \underset{.}{ع}}{و}\left(\underset{.}{ع} + \frac{ع - \underset{.}{ع}}{٢}\right) = \frac{ع - \underset{.}{ع}}{و} \times \frac{ع + \underset{.}{ع}}{٢} = \frac{ع^٢ - \underset{.}{ع}^٢}{٢ و}$$

ومنه يحدث

$$ع = \sqrt{\underset{.}{ع}^٢ + ٢ و ه}$$

فاذا كانت السرعة الابتدائية معدومة فالقانون يؤول الى

$$ع = \sqrt{٢ و ه}$$

واذا كانت الحركة منتظمة التقصير يكون

$$ع = \sqrt{\underset{.}{ع}^٢ - ٢ و ه}$$

العجلة فى التحرك المستقيم الحينا اتفق ـ العجلة المتوسطة ـ العجلة المتوسطة لحركة متغيرة حينما اتفق فى زمن معين هى عجلة التحرك المنتظم التغير الذى يستعمله المتحرك فى المدة المفروضة لقطع نفس المسافة التى قطعها بحركة متغيرة

فقياسا على كون مقدار العجلة $و = \frac{ع - ع}{ن}$ المستخرج ذلك من قانون

$$ع = ع + و ن$$

تكون العجلة المتوسطة هي النسبة الكائنة بين ازدياد السرعة وبين ازدياد الزمن

اعني اذا فرض أن متحركا يتحرك بحركة مستقيمة متغيرة حيثما اتفقت ورمز برمزي ع ، عَ لسرعتيه في الزمنين ن ، (ن + ى) تكون العجلة المتوسطة في مدة الزمن ى هي $\frac{عَ - ع}{ى}$

العجلة في لحظة معينة ـ العجلة في لحظة معينة هي النهاية التي تميل اليها نسبة ازدياد السرعة الى ازدياد الزمن حينما يميل ازدياد الزمن نحو الصفر

فحينئذ اذا مال ى نحو الصفر فالكمية عَ ـ ع تميل نحو الصفر أيضا اما العجلة المتوسطة $\frac{عَ - ع}{ى}$ تميل نحو نهاية معينة و وتكون هي بحسب التعريف عبارة عن العجلة في اللحظة ن اعني أن

$$و = نها \frac{عَ - ع}{ى} \quad \text{عندما تميل ى نحو الصفر}$$

(الارتباطات الجبرية الواقعة بين المسافة والسرعة والعجلة في الحركة المستقيمة المتغيرة)

النهاية التي تميل اليها النسبة الكائنة بين ازدياد دالة ما ص وازدياد متغيرها س حينما يميل هذا المتغير نحو الصفر تسمى مشتقة ص بالنسبة للكمية س

اعني اذا كانت $ص = د (س)$

فمشتقة الدالة تبين هكذا

$$صَ = دَ (س)$$

ففي حركة مستقيمة حيثما اتفقت المسافة هـ والسرعة ع والعجلة حـ هي دوال للمتغير ن

وبناء على التعاريف السابقة تكون السرعة مشتقة المسافة والعجلة مشتقة السرعة

فاذا وضعنا $هـ = د (ن)$ يكون

$$ع = هَ = دَ (ن) \quad \text{ويكون}$$

$$و = عَ = هً = دً (ن)$$

ومعلوم في علم الجبر أولا ان مشتقة حاصل الجمع تساوى مجموع مشتقات اجزائه

ثانيا ان مشتقة دالة صحيحة مثل $عَ نَ^{م}$ يتحصل عليها بالقانون

$$م عَ نَ^{م-1}$$

مثال ذلك اذا كان $هـ = عَ + تَ ن + حَ ن^{2} + لَ ن^{3}$

فيكون $ع = تَ + 2 حَ ن + 3 لَ ن^{2}$ (

$$و = 2 حَ + 6 لَ ن$$

سقوط الأجسام

من الامثلة المهمة للحركة المنتظمة العجلة سقوط الاجسام في الفراغ وسقوط الاجسام يتبع هذه القوانين

الثلاثة ،

الثلاثة الآتيه

الاول ـ جميع الأجسام تسقط بسرعة واحدة فى الفراغ

الثانى ـ المسافات المقطوعة تكون مناسبة لمربعات الازمان المستعملة لقطعها

الثالث ـ السرعة تكون مناسبة لزمن السقوط

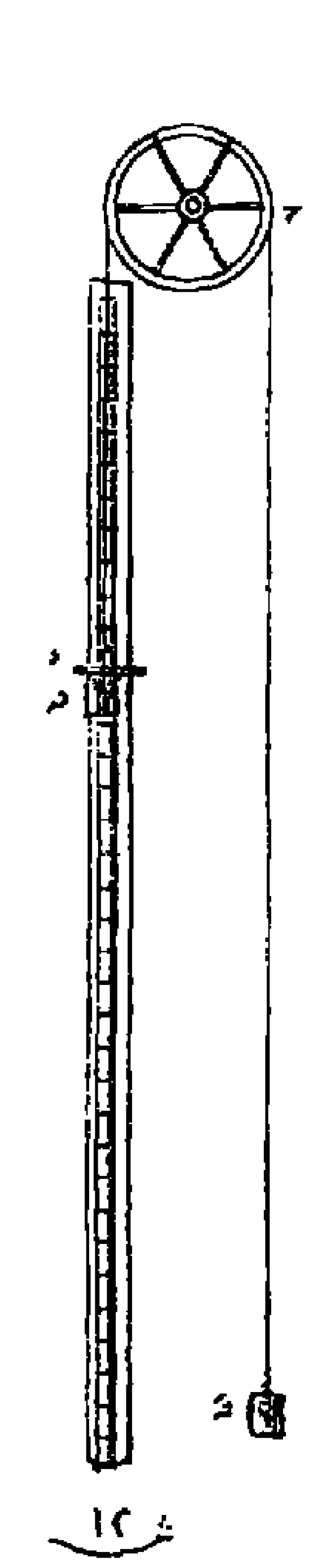
ويمكن تحقيق القانون الاول بواسطة انبوبة نيوتون والاثنان الآخران بالمستوى المائل لغليلى وبآلة آتود وجهاز موران وغير ذلك .

تجارب غليلى

قد استعمل غليلى المستوى المائل لأجل ايجاد قوانين سقوط الاجسام وهذا المستوى عبارة عن خيط مشدود تتدحرج عليه بكرة معلق فى حاملها ثقل ويمكن ابطاء السرعة على حسب الاراده بتقليل زاوية المستوى المائل ثم تقاس المسافات المقطوعة بضبط تام لتستنتج منها القوانين المطلوبة وقد شاهد غليلى ان المسافات المقطوعة فى المسافات الزمنية المتتالية المتساوية تكون مناسبة للأعداد الفردية

ولكن من المعلوم أن مجموع الأعداد الفردية الاولى التى عددها ح هى ح² فحينئذ المسافات المحسوبة من ابتداء اللحظة الابتدائية هى مناسبة لمربعات الأزمان

آلة آتود



تتركب آلة آتود من بكرة خفيفة ح ش ١٢ يمر على مقرها خيط رفيع من الحرير يحمل فى طرفيه ثقلين د ، د َ يحدثان مع بعضها توازنا فاذا وضع على احد هذين الثقلين ثقل اضافى ء فيتحرك الثقلان والخيط فى الاتجاه الذى وضع فيه هذا الثقل وبما ان الثقل ء يحرك اثناء سقوطه الثقلين د ، د َ ينتج أن حركته تكون بطيئة عنها اذا سقط بمفرده فى الفراغ وبذا تكون هذه الحركة سهلة المشاهدة ومقاومة الهواء للجسم غير محسوسة

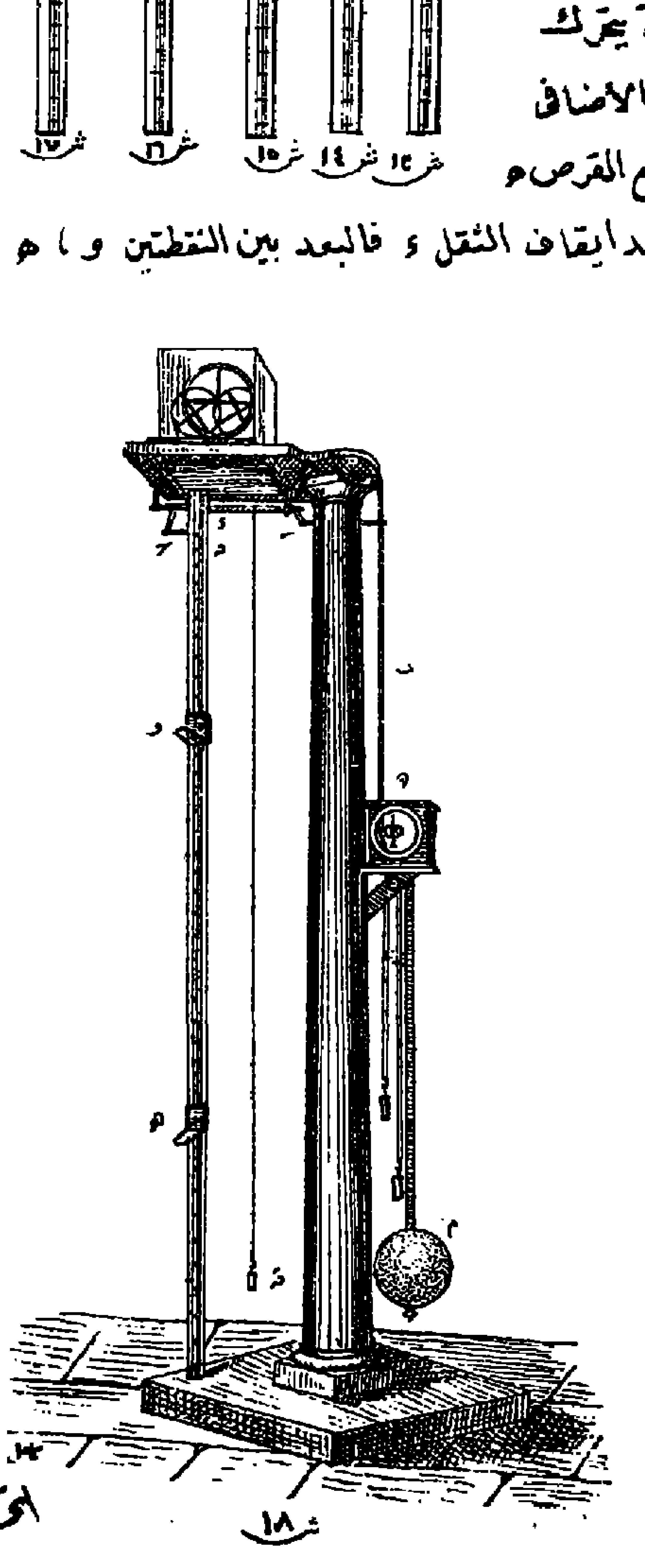
قانون المسافات ـ لأجل تعيين القانون الذى تتغير تبعا له المسافات التى يقطعها الجسم الساقط فى الازمنة المتتالية تستعمل مسطرة رأسية مقسمة يسقط أمامها الثقل د + ء فيوقف أولا هذا الثقل أمام صفر المسطرة الى اللحظة التى تبتدئ فيها ثانية معينة يعرف ابتداؤها بدق ساعة ثم يبحث بالاستقراء أى باعادة التجربة عدة مرات عن النقطة من المسطرة التى يلزم ان يوضع فيها قرص افقى هـ ينزلق على المسطرة بواسطة تكتين يمكن تثبيتها عليها بواسطة مسمار محلوظ ش ١٣ حتى يسمع ملامسة الثقل الساقط له مع دق الساعة الدال على انتهاء الثانية فتعلم

حينئذ المسافة مَ التى تقطع فى ثانية ثم تعين بهذه الطريقة على التوالى
المسافات مٓ ، مٓٓ التى تقطع فى ثانيتين ثم فى ثلاث ثوان وهكذا
ش١٤ ، ش١٥ فبمقارنة هذه النتائج ببعضها يرى أن المسافات
مَ ، مٓ ، مٓٓ مناسبة للأعداد ١ و ٤ و ٩ أعنى لمربعات الازمنة وهذا
القانون هو ما يعبر عنه بقانون المسافات

ش١٣ ش١٤ ش١٥ ش١٦ ش١٧

قانون السرع

اذا اريد قياس السرع المكتسبة فى الاوقات المختلفة من الحركة تستعمل
حلقة و تنزلق على المسطرة بفكين ش١٦ وهذه الحلقة تسمح بمرور
الثقل ه منها من غير ان يلامسها وتعيق سير الثقل الاضافى ى
لطول شكله نتوضع أولا الحلقة و على القسم مَ بحيث انها تمنع الثقل
الاضافى ى من السقوط بعد الثانية الأولى فنجد هذه اللحظة يتحرك
الثقل ه حركة منتظمة بالسرعة التى كان عليها عند حذف الثقل الاضافى
ى فيجب حينئذ كما سبق عن النقطة من المسطرة اللازم وضع القرص هـ
فيها حتى يسمع صوت مصادمة الثقل له فى انتهاء ثانية بعد ايقاف الثقل ى فالبعد بين النقطتين و ، هـ
يكون عبارة عن المسافة التى تقطع فى ثانية اثناء
هذه الحركة المنتظمة اعنى السرعة التى اكتسبها الجسم
بوصوله الى نقطة و وحفظها اثناء تحركه من و الى
هـ وليكن سَ هذه السرعة ثم نعين بهذه الطريقة
السرع سٓ ، سٓٓ ، الخ التى يكتسبها الجسم بعد ثانيتين
ش١٧ ثم ثلاث ثوان والخ فيوجد ان سَ ، سٓ ، سٓٓ
، الخ مناسبة للاعداد ١ و ٢ و ٣ و الخ أعنى
مناسبة للازمنة وهذا القانون هو ما يسمى بقانون
السرع وآلة أتود المستعملة الآن لاثبات قانونى
سقوط الاجسام مبينة بتمامها فى ش١٨



ش١٨

و توجد معادلتان جبريتان لبيان قانونى سقوط
الاجسام فى الفراغ وهما

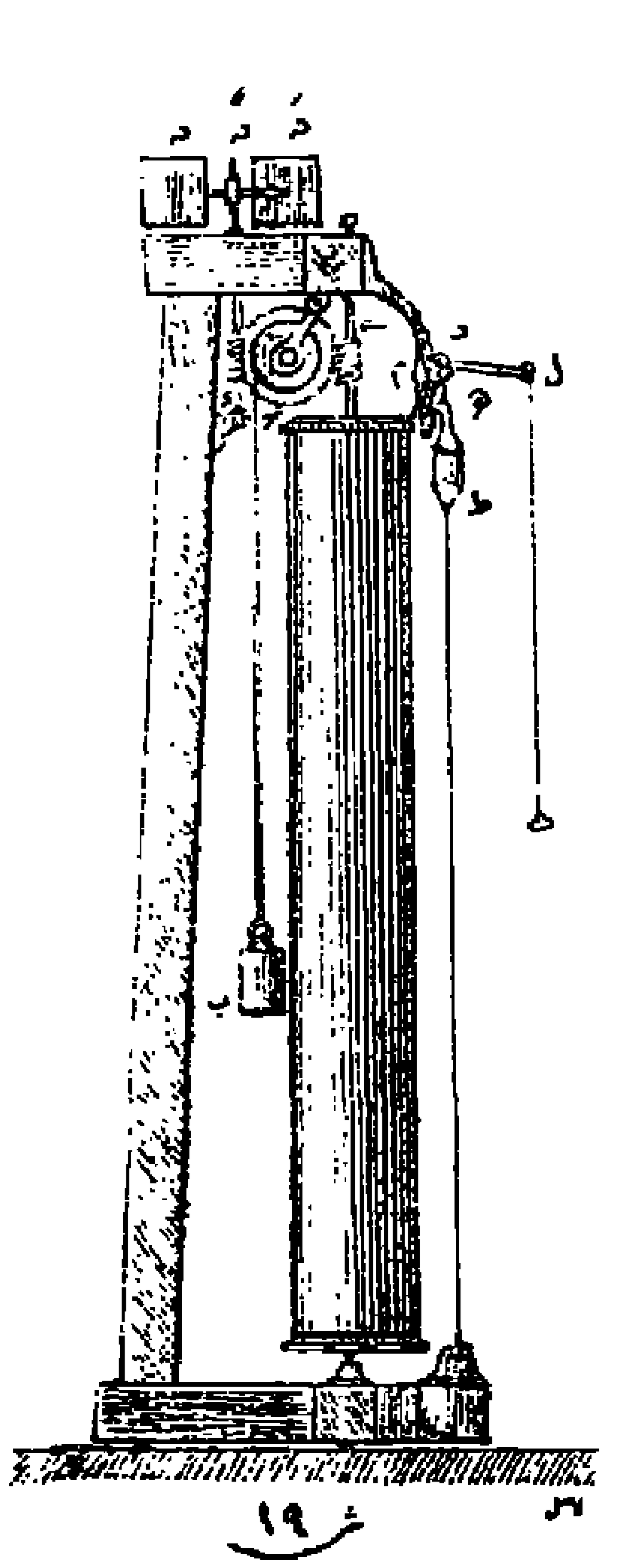
$$م = \frac{ج}{٢} ز^{٢} \quad ، \quad س = ج ز$$

وفى هاتين المعادلتين م تدل على المسافة التى يقطعها
الجسم ، ز الزمن المستعمل لقطع هذه المسافة ، س السرعة

التى يكتسبها الجسم بعد الزمن ن أما حـ فهو عدد ثابت يدل على المقدار الذى تزيد به سرعة الأجسام الساقطة فى الفراغ فى كل ثانية ويسمى بالعجلة وهو يختلف باختلاف العروض ومقداره فى مصر يساوى ٩ر٧٩١٢ متر

جهاز موران

هذا الجهاز يتركب كما فى ش ١٩ من اسطوانة رأسية ا مغطاة بفرخ من الورق وتتحرك بواسطة ثقل ب يحرك الطارة حـ وهذه الطارة تتعشق من جهة مع برِّيمة غير منتهية ء مصنوعة على محور الاسطوانة ومتعشقة من الجهة الثانية مع برِّيمة غير منتهية أيضا ء محورها الرأسى حامل لاجنحة ﻫ ، ﻫَ ، ﻫً تستعمل لتنظيم الحركة والثقل ط المحصور بين دليلين من المعدن يحمل قلما راسما هو يرتكز على جسم الاسطوانة بواسطة زنبلك



وحينما تصير حركة الاسطوانة منتظمة يترك الثقل ط ونفسه بواسطة سقاطة ل وم فالقلم يرسم على الاسطوانة الخط البيانى للحركة

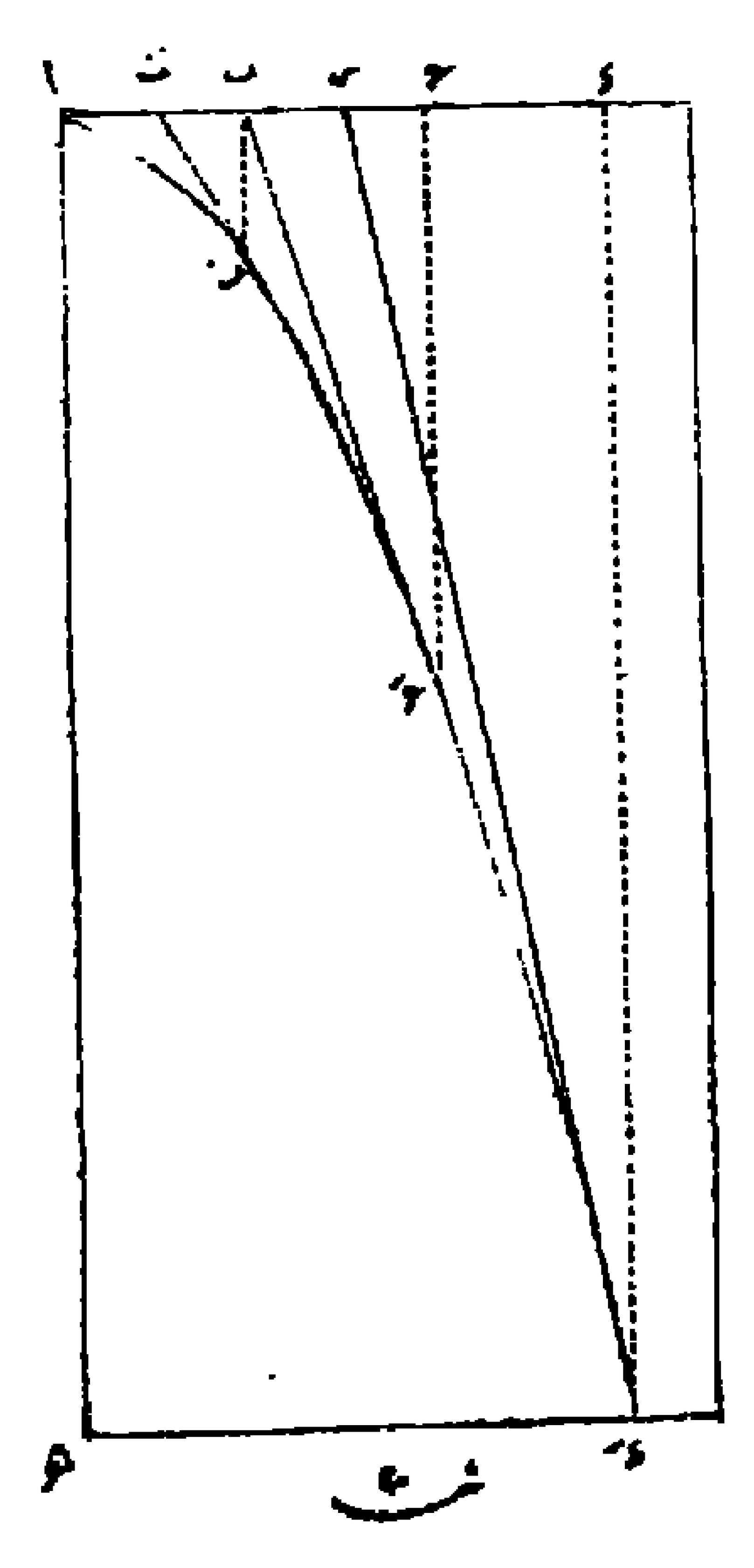
وهذا الجهاز له أهمية عظيمة فيسمح لدراسة حركة الجسم فى سقوطه المطلق ولايجاد المسافة المقطوعة فى مدة زمن صغير بقدر ما يراد وزيادة على ذلك فان نتائج التجارب تتعين بنفس الجسم الساقط مباشرة ولا يحتاج لمهارة المجرب



قانون المسافات

لأجل تحقيق قوانين سقوط الاجسام بواسطة المحنى المرسوم على سطح الاسطوانة نفرد الفرخ الورق السابق ذكره بقطعه على حسب الراسم اوش ٢٠ ثم يؤخذ على اء اطوال متساوية اب ، ا حـ ، ... الخ تدل على ازمان متساوية

وفى نهاية الزمن اب يكون الثقل موجودا فى ت ويكون قطع فى النزول المسافة الرأسية ب ت وفى نهاية الزمن ا حـ الذى هو ضعف اب يكون قطع المسافة حـ حَ وباجراء المقياس نجد أن



حـ حَ = ٤ ب ت = ب ت × ٢^٢

ء ءَ = ٩ ب ت = ب ت × ٣^٢

. . . .

فحينئذ تكون المسافات المقطوعة فى السقوط المطلق لجسم خارج من السكون مناسبة لمربعات الازمان المستهلكة لقطعها وهذا القانون يؤدى الى النسب الآتية

$$\frac{ب ب}{ا ب^2} = \frac{حـ حـ}{ا حـ^2} = \frac{ء ء}{ا ء^2}$$

التي تدل على أن المنحنى هو منحنى القطع المكافئ

قانون السرع

ولاجل تحقيق قانون السرع نرسم ماسات للمنحنى من النقط ب ، حـ ، ء ..... الخ ومن المعلوم أن المماس في نقطة ب يمر بالنقطة ت التي هي منتصف المستقيم اب وبالمثل تكون المماسات في النقط حـ ، ء مارة على التناظر بالنقط ب ، س ..... الخ التي هي منتصفات المستقيمات ا حـ ، اء ..... الخ بحيث أنه اذا فرض ان ت ب = ف يكون ب حـ = ٢ ف ، س ء = ٣ ف ..... الخ وعلى ذلك اذا كانت ب ب = هـ يكون حـ حـ = ٤ هـ ، ء ء = ٩ هـ ، ..... الخ

وحينئذ اذا كان طول جزء المستقيم اء الدال على زمن مساوٍ لثانية مقداره متر فأن السرع ع ، ع ، ..... الخ في النقط ب ، حـ ، ء ..... الخ تتعين بظلول الزوايا ب ت ب ، حـ ب حـ ، ء س ء ..... الخ ولكن حيث ان الطول الدال على وحدة الازمان غير معلوم فنفرض ان $\frac{1}{ك}$ هو العدد المجهول الذي تضرب فيه جميع الأطوال اب ، احـ ، اء ..... الخ لاجل ان يكون الطول الدال على ثانية واحدة مساويا للمتر حينئذ يكون

$$ع_1 = ب ب : \frac{1}{ك} ب ت = ك \frac{ب ب}{ت ب} = ك \frac{هـ}{ف}$$

وايضا

$$ع_2 = ك \frac{حـ حـ}{ب حـ} = ك \frac{٤ هـ}{٢ ف} = ٢ ع_1 ،$$

$$ع_3 = ك \frac{ء ء}{س ء} = ك \frac{٩ هـ}{٣ ف} = ٣ ع_1 ،$$

. . . .

ويرى من ذلك ان السرعة تكون مناسبة لزمن السقوط

وحينئذ فقوانين سقوط الأجسام تكون هي بالضبط قوانين الحركة المنتظمة العجلة للأجسام الخارجة من السكون ويكفي حينئذ تحقيق أحد هذه القوانين حيث أن احدها يثبت الآخر

عجلة التثاقل

قد شاهدنا من جهاز موران ان الجسم قطع تقريبا ٤٫٩٠ في الثانية الأولى من سقوطه وحينئذ فتكون عجلة التثاقل مساوية الى ٩٫٨٠ ويرمز لها بالحرف حـ ولاجل الحصول على مقدار للعجلة أكثر ضبطا من السابق يجب الالتجاء الى البندول وهاك جدولا مشتملا على بعض النتائج التي صار الحصول عليها

أسماء البلدان	عروض شمالية		مقدار العجلة حـ
مصر	٣٠°	٢	٩٫٧٩١٢
باريس	٤٨°	٥٠	٩٫٨٠٨٨
سيتزبرج	٧٩°	٥٠	٩٫٨٢٨٩
خط الاستوا	٠°	٠	٩٫٧٨٠٦

ويشاهد

ويشاهد من هذا الجدول ان مقدار ح يأخذ في الصغر من القطب الى خط الاستواء

قوانين خاصة بسقوط الأجسام في الفراغ

أولا – في حالة سقوط الجسم بدون سرعة ابتدائية تكون المسافة ء المقطوعة في نهاية الزمن ن مقدرا بالثواني هي

$$ء = \frac{ح ن^2}{2}$$

والسرعة ع في نهاية الزمن ن هي

$$ع = ح ن$$

والسرعة بدلالة الارتفاع ء المقطوع هي

$$ع = \sqrt{2 ح ء}$$

ثانيا – في حالة سقوط الجسم بسرعة ابتدائية $ع_0$ تكون المسافة المقطوعة في نهاية الزمن ن هي

$$ء = ع_0 ن + \frac{ح ن^2}{2}$$

والسرعة في نهاية الزمن ن هي

$$ع = ع_0 + ح ن$$

والسرعة بدلالة الارتفاع ء هي

$$ع = \sqrt{ع_0^2 + 2 ح ء}$$

ثالثا – في حالة قذف الجسم رأسيا من أسفل الى أعلا بسرعة ابتدائية $ع_0$ فالحركة تكون منتظمة التقصير وتكون المسافة المقطوعة في نهاية الزمن ن هي

$$ء = ع_0 ن - \frac{ح ن^2}{2}$$

والسرعة في نهاية الزمن ن هي

$$ع = ع_0 - ح ن$$

والسرعة بدلالة الارتفاع ء هي

$$ع = \sqrt{ع_0^2 - 2 ح ء}$$

تنبيه – بناء على قانون $ع = ع_0 - ح ن$ يرى ان الجسم يرتفع كلما كانت السرعة موجبة ويصل الى نهايته العظمى في الارتفاع حينما يكون $ع = ٠$ وحينئذ يكون $ع_0 = ح ن$

ومنها $ن = \frac{ع_0}{ح}$

أعني ان زمن الصعود يساوي $\frac{ع_0}{ح}$ وبوضع هذا المقدار في القانون $هـ = ع_0 ن - \frac{ح ن^2}{2}$ يحصل على أعظم ارتفاع الجسم من القانون $هـ = \frac{ع_0^2}{ح} - \frac{ع_0^2}{2ح} = \frac{ع_0^2}{2ح}$

وحينئذ يرتفع الجسم المقذوف رأسيا من أسفل الى اعلا بسرعة $ع_0$ ارتفاعا قدره $\frac{ع_0^2}{2ح}$

الحركة المنحنية

اعلم ان سرعة حركة نقطة متعلق في آن واحد بمقدارها وباتجاهها وأن سرعة الحركة المستقيمة تكون دائما

متجهة جهة الحركة وفى اتجاه خط سير المتحرك لكن سرعة الحركة المنحنية الحيثما اتفق تغير دائما اتجاهها وكذلك مقدارها وقد يصطلح على ما يأتى فى الحركة المنحنية

أولا اذا فرض متحرك يرسم منحنيا حيثما اتفق ا م مَ ب على حسب قانون معلوم ه = د (ز) وكان م ، مَ هما وضعاه فى الزمنين ز ، ز + ى فأن الانتقال المتوسط فى مسافة زمنية ى يكون هو الوتر م مَ للقوس المقطوع على خط السير فى مدة هذه المسافة

وأن مقدار واتجاه وجهة الانتقال المذكور تكون هى مقدار واتجاه وجهة الجزء المستقيم م مَ

وثانيا تكون السرعة المتوسطة هى سرعة حركة مستقيمة منتظمة التى يستعملها المتحرك فى المدة ى لقطع الوتر م مَ فى المدة المذكورة ومقدارها هى نسبة $\frac{\text{الوتر م مَ}}{\text{ى}}$

واتجاهها هو اتجاه المستقيم م مَ

وثالثا تكون السرعة فى اللحظة ز هى النهاية التى تميل اليها السرعة المتوسطة اثناء ازدياد الزمن ى حينما يميل هذا الازدياد نحو الصفر ومقدارها هو ع = نها $\frac{\text{الوتر م مَ}}{\text{ى}}$ عندما يميل ى نحو الصفر واتجاهها هو اتجاه ماس خط السير فى نقطة م وجهتها هى جهة الحركة فى هذه النقطة

رابعا — نظرية — مقدار السرعة فى اللحظة ز هو مشتقة المسافة بدلالة الزمن

لأنه من المعلوم أن ع = نها $\frac{\text{الوتر م مَ}}{\text{ى}}$ واذا ضرب البسط والمقام فى القوس م مَ يكون

$$\text{ع} = \text{نها} \frac{\text{قوس م مَ} \times \text{وتر م مَ}}{\text{ى} \times \text{قوس م مَ}}$$ أعنى أن

$$\text{نها} \frac{\text{الوتر مَ م}}{\text{قوس م مَ}} \times \text{نها} \frac{\text{قوس م مَ}}{\text{ى}}$$

وحيث ان نهاية النسبة الأولى مساوية للوحدة تكون

$$\text{ع} = \text{نها} \frac{\text{قوس م مَ}}{\text{ى}}$$

واذا رمزنا بالرمزين ه ، هَ للمسافتين المقطوعتين على خط السير فى الزمنين ز ، ز + ى يكون

$$\text{ع} = \text{نها} \frac{\text{هَ} - \text{ه}}{\text{ى}}$$

أعنى أن ع = دَ (ز) وهو المطلوب

خامسا والعجلة الماسة فى اللحظة ز هى مشتقة السرعة وهى متجهة على حسب اتجاه الماس للمنحنى فاذا صارت الحركة مستقيمة فأن العجلة الماسة تكون هى عين العجلة فى التحرك المستقيم المنتظم التغير وقد وصفت بالعجلة الماسة بالنظر لاتجاهها ليس إلا لأنها ليست هى العجلة الوحيدة التى تعتبر فى الحركة المنحنية

مبادئ على حركة جملة مادية غير متغيرة

تعريف — الجملة الغير متغيرة هى ما تكونت من جملة نقط ابعادها عن بعضها غير متغيرة

لأجل تعريف جملة غير متغيرة يلزم معرفة الأبعاد الكائنة بين ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة ا ، ب ، حـ من الجملة المذكورة ثم ابعاد كل من النقط الأخرى عن الثلاثة نقط المذكورة على التتابع طبق وضع

لوضع وحركة جملة مادية في الفراغ تكونان مبينتين متى علم وضع وحركة المثلث ا ب ح
والحركات الأبسط ما يكون لجملة غير متغيرة هي الحركة الانتقالية والحركة الدورانية

الحركة الانتقالية

تعريف ـ الجملة الغير متغيرة تكون حركتها انتقالية متى كانت اضلاع مثلث مثل ا ب ح المكون لجزء منها باقية على الدوام موازية لوضعها الأصلي

وفي هذه الحركة كل مستقيم مثل م ه واصل بين نقطتين حيثما اتفق من الجملة يكون موازيا لوضعه الاصلي وجميع نقط الشكل ترسم في آن واحد اقواسا متساوية ومتوازية بحيث تكون سرعها في أي لحظة حيثما اتفق متساوية ومتوازية أيضا

وعليه فتكون السرعة المشتركة لجميع نقط الجملة المذكورة هي سرعة الحركة الانتقالية في اللحظة المفروضة وتتعين كما اذا كان المعلوم حركة نقطة واحدة فقط فحركة المكبس داخل جسم الطلمبة من قبيل الحركة الانتقالية المستقيمة وحركة كفتى الميزان روبرفال من قبيل الحركة الانتقالية المنحنية

الحركة الدورانية حول محور

تعريف ـ الجسم يكون له حركة دورانية حول محور متى رسمت جميع نقطه محيطات دوائر مستوياتها عمودية على هذا المحور

وفي هذه الحركة جميع نقط الجسم ترسم في آن واحد اقواسا متشابهة واطوالها مناسبة لانصاف اقطارها وحينئذ يكون

$$\frac{مَ م}{و م} = \frac{ه َه}{و ه}$$

وعلى ذلك اذا رمزنا بالحروف ه ، هَ ، هً للمسافات المقطوعة في آن واحد بالنقط التي ابعادها عن المحور هي نق ، نقَ ، نقً يحدث

$$\frac{ه}{نق} = \frac{هَ}{نقَ} = \frac{هً}{نقً}$$

السرعة الزاوية ـ السرعة الزاوية هي سرعة النقطة المتباعدة عن محور الدوران ببعد مساو للوحدة فاذا رمز للسرعة المذكورة بالرمز ح ولسرعة نقطة حيثما اتفق بالرمز ع ولبعد تلك النقطة عن محور الدوران بالرمز نق فان سرعة النقطة المذكورة تكون مساوية لحاصل ضرب السرعة الزاوية في بعدها عن محور الدوران أعني يكون ع = ح نق

والبرهنة على ذلك يقال حيث أن المسافات المقطوعة في آن واحد مناسبة لأبعاد النقط عن محور الدوران يكون

$$\frac{ع}{نق} = \frac{ح}{١} \quad \text{ومنه}$$

$$ع = ح \; نق$$

والحركة الدورانية تكون منتظمة أو متغيرة على حسب ما تكون السرعة الزاوية ح ثابتة أو متغيرة
ثم ان سرعة الحركة المنتظمة الدورانية تعين غالبا بعدد الدورات التي يصنعها الجسم في مدة معينة ويسهل استخراج

السرعة الزاوية منها

فاذا رمز بحرف ء لعدد الدورات التي يصنعها الجسم في الدقيقة الواحدة فأن النقطة المتباعدة عن المحور ببعد مساوٍ لمتر ترسم في مدة ستين ثانية قوساً طوله ء × ٢ ط والسرعة الزاوية تكون حينئذ هي

$$ع = \frac{ء \times ٢ ط}{٦٠} = \frac{ء ط}{٣٠}$$

تمرينات

(١) المطلوب رسم الخط البياني لحركات معلومة بالمعادلات الآتية التي فيها عً ، ع كميات موجبة

ف = عً + ع ن ،

ف = عً − ع ن ،

ف = −عً + ع ن ،

ف = −عً − ع ن

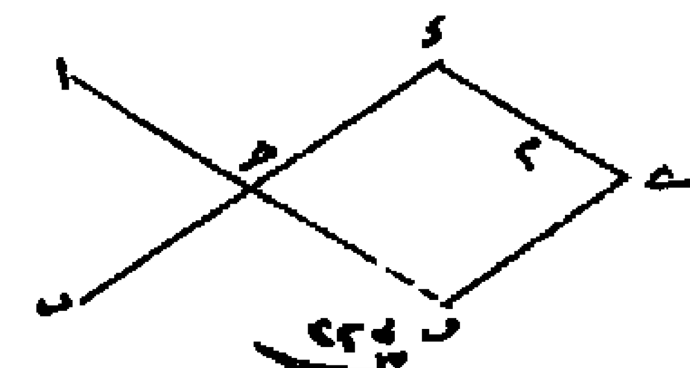
(٢) المطلوب البرهنة على ان المعادلة ف = ع ن + ك ن² تدل على حركة منتظمة العجلة

(٣) المعلوم حركة معادلتها ف = ن + ن² والمطلوب أولاً رسم الخط البياني للحركة وثانياً رسم الخط البياني للسرعة

(٤) المعلوم حركة معادلتها ف = ك ن³ والمطلوب أولاً ايضاح قانون الحركة وثانياً قانون السرعة

(٥) المطلوب ايجاد مقدار العجلة في نهاية الزمن ن لحركة متغيرة حيثما اتفق معلومة بالمعادلة ف = ك ن³

(٦) المطلوب مناقشة الحركة المعلومة بالمنحني البياني اب شكل



(٧) المعلوم المنحني البياني لحركة ما والمطلوب ايجاد المنحني البياني للسرع وبالعكس

(٨) المعلوم نقطة متحركة باستظام على محيط دائرة والمطلوب مناقشة حركة مسقطها على أحد اقطار الدائرة المذكورة ورسم المنحنيات البيانية

(٩) المعلوم المعين المفصلي حـ ء ـ ف مثبت في نقطة حـ والنقطتان ا ، ب يتحركان باستظام والمطلوب مناقشة حركتي النقطة ـ والنقطة م شكل ٢٢

(١٠) المطلوب تعيين سرعة النقطة الارضية التي عرضها ل في الحركة اليومية

(١١) المطلوب رسم الخط البياني لقطارات السكة الحديد من بعد معلومية المعالم الناتجة من الأدلة الخاصة بالسكة الحديد ثم معرفة اللحظة والوضع اللذين فيهما يتقابل قطاران منها بفرض أن الحركات منتظمة الحركة المنتظمة التغيير

(١٢) المطلوب ايجاد المسافة المقطوعة في الزمن ن بمعلومية الخط البياني للسرع

(١٣) المطلوب البرهنة على أن مجموع المسافات المقطوعة في لحظات متساوية البعد عن منتصف الزمن المفروض ثابت ومقدار هذا المجموع المذكور يكون بعينه كما لو كانت سرعة التحرك في هذه اللحظات هي سرعة منتصف

منتصف هذا الزمن ثم استنتاج معادلة المسافة المقطوعة في مدة الزمن ز

(١٤) المطلوب البرهنة على أن المسافات المقطوعة بجسم ساقط سقوطا مطلقا في أزمان متساوية متتالية تكون مناسبة للأعداد الفردية المتتالية على التناظر

(١٥) المطلوب البرهنة على أن المسافة المقطوعة في مدة الزمن ز تكون مساوية لخارج قسمة فرق مربعي السرعتين في نهاية وابتداء الزمن المذكور على ضعف العجلة

(١٦) السرعة المتوسطة في زمن معين هي المتوسط العددي للسرعتين المقطوعتين في ابتداء وانتهاء الزمن المذكور وهي مساوية للسرعة المقابلة لمنتصف هذا الزمن

(١٧) المطلوب البرهنة على أن منتصف ازدياد مربع السرعة يكون مساويا لحاصل ضرب العجلة في المسافة المقطوعة

(١٨) المطلوب معرفة الزمن الذي في نهايته يرتقي المقذوف الخارج بسرعة من أسفل الى ارتفاع ء ثم مناقشة القانون

(١٩) من بعد معلومية أن الجسم المقذوف رأسيا من اسفل الى أعلا يمر مرتين في نقطة معينة فما هو البرهان على أن سرعته في النقطة المذكورة في كل من المرتين تكون واحدة

تركيب الحركات

المتحرك لا يكون له سرعة حركة واحدة في الفراغ ولدراسة هذه الحركة تعتبر غالبا كأنها محصلة جملة حركات آنية فاذا تدحرجت كرة على ظهر سفينة سائرة في نهر فان مجموع الاوضاع التي تأخذها الكرة المذكورة على ظهر السفينة تكون هي الحركة النسبية لهذه الكرة بالنسبة للسفينة ولكن بالنسبة لراصد موجود على شاطئ النهر فان الكرة المذكورة لا تكون لها هذه الحركة النسبية فقط بل تكون لها حركة مشتركة أيضا مع السفينة وحينئذ فالحركة الحقيقية للكرة أو حركتها المطلقة يمكن اعتبارها كمحصلة حركتين آنيتين ومعرفة الحركات المركبة يوصل لتعيين الحركة المطلقة للمتحرك

ففي المثال السابق يمكن في كل لحظة معرفة وضع السفينة بالنسبة للشاطئ ووضع الكرة بالنسبة للسفينة ثم تعيين وضع الكرة في الفراغ

وعلى ذلك فيتحصل على خط السير الحقيقي للكرة وعلى النقطة التي توجد فيها على خط السير المذكور في لحظة ما وحينئذ فحركة الكرة تكون معينة تعيينا تاما والحركات المركبة يمكن تعددها فالنهر مثلا يشترك مع الارض في الحركة اليومية ويشترك معها أيضا في حركتها السنوية وهكذا

وعلى أي حال فان الحركة المطلقة للمتحرك يمكن استنتاجها دائما من الحركات المركبة وسنتكلم على بعض الحالات البسيطة لتركيب الحركات فنقول

تركيب الحركات عبارة عن ايجاد حركة متحرك له جملة حركات آنية ويلزم لذلك أولا تعيين خط سير المتحرك وثانيا تعيين سرعته في كل لحظة من الحركة

الحركات المنتظمة

تركيب حركتين آنيتين مستقيمتين ومنتظمتين

متوازي أضلاع السرع

نظرية — متوازي أضلاع السرع — محصلة الحركتين الآنيتين المستقيمتين المنتظمتين هي حركة مستقيمة ومنتظمة وأن سرعة الحركة المحصلة تبين مقدارا واتجاها بقطر متوازي الأضلاع المنشأ على سرعتي الحركتين المركبتين

فاذا فرض ان نقطة مثل ا شـ٣ تتحرك بانتظام على المستقيم اس اثناء تحرك المستقيم المذكور بالتوازي لنفسه بحيث أنه عندما تأتي النقطة ا في نهاية الزمن ز في نقطة ب من المستقيم اس تكون النهاية ا من المستقيم المذكور قطعت بانتظام المسافة اح من المستقيم اص ويأتي المتحرك حينئذ في نقطة ء ويكون حء = اب

فنبرهن أولا على أن المتحرك يسير من ا الى ء على اتجاه القطر اء لمتوازي الأضلاع ولذلك نبحث عن وضع المتحرك في نهاية زمن ما زَ عندما يأتي المستقيم اب في الوضع ـه وحينئذ يقال حيث أن الحركة منتظمة يكون

$$\frac{\text{اـ}}{\text{اح}} = \frac{\text{زَ}}{\text{ز}}$$

ولكن في اثناء الزمن زَ تقطع النقطة ا المسافة س على الاتجاه اب ويكون

$$\frac{\text{س}}{\text{اب}} = \frac{\text{زَ}}{\text{ز}}$$ ومنها يحدث

$$\frac{\text{س}}{\text{اب}} = \frac{\text{اـ}}{\text{اح}}$$

لكن من تشابه المثلثين اـم ، احء وبناء على كون حء = اب يكون

$$\frac{\text{ـم}}{\text{اب}} = \frac{\text{اـ}}{\text{اح}}$$ وعليه يكون

$$\text{س} = \text{ـم}$$

وحينئذ فالنقطة ا تسير دائما على اء

وثانيا نبرهن على أن المتحرك يتحرك على القطر المذكور بانتظام

ولذلك يقال أنه من النسب $\frac{\text{اـ}}{\text{اح}} = \frac{\text{ام}}{\text{اء}} = \frac{\text{زَ}}{\text{ز}}$ شـ٤ يرى ان نقطة ا تتحرك على اء بحركة منتظمة حيث ان المسافتين ام ، اء مناسبة لزمني قطعهما

وثالثا نبرهن على أن سرعة المتحرك تكون معينة بقطر متوازي الاضلاع المنشأ على سرعتي الحركتين المركبتين

ولذلك نقول انه اذا فرض ان اع ، اع' يدلان على سرعتي الحركتين المركبتين فأن اع يدل على سرعة الحركة المحصلة حيث أنه عبارة عن المسافة المقطوعة في وحدة الزمن

وجميع القوانين الخاصة بمتوازي اضلاع القوى من علم الاستاتيك يمكن تطبيقها على متوازي أضلاع السرع

فحينئذ اذا

فحينئذ اذا رمزنا بالرمزين ع١ ، ع٢ للسرعتين المركبتين وبالحرف ع للسرعة المحصلة يكون

$$\text{ع}^2 = \text{ع}_1^2 + \text{ع}_2^2 + 2\,\text{ع}_1\,\text{ع}_2\ \text{جتا ا}$$

$$\frac{\text{ع}_1}{\text{حا ب}} = \frac{\text{ع}_2}{\text{حا ا}} = \frac{\text{ع}}{\text{حا(ا+ب)}} = \frac{\text{ع}}{\text{حا اا}}$$

نتيجة اذا كانت السرعتان على استقامة واحدة فأن المحصلة تكون مساوية لمجموعها ان كانتا متجهتين في جهة واحدة ولفرقهما ان كانتا متجهتين في جهتين متضادتين

كثير اضلاع السرع

اذا كان لنقطة مادية عدد حينما اتفق من السرع الآنية فأنه يمكن تعيين محصلتها بتكوين كثير اضلاع السرع كما في حالة القوى في الاستاتيك

متوازي سطوح السرع

محصلة ثلاث سرع آنية ليست موجودة في مستوٍ واحد يمكن ايجادها بواسطة متوازي سطوح السرع كما في حالة القوى من علم الاستاتيك أيضا واذا كانت السرع المذكورة متعامدة يكون بناء على ما تقدم أيضا

$$\text{ع}^2 = \text{ع}_1^2 + \text{ع}_2^2 + \text{ع}_3^2$$

$$\text{ع}_1 = \text{ع حا ا}$$

$$\text{ع}_2 = \text{ع حا ب}$$

$$\text{ع}_3 = \text{ع حا حـ}$$

الحركات المنتظمة التغير

نظرية – محصلة الحركتين الآنيتين المستقيمتين المنتظمتي العجلة الخاليتين من السرعتين الابتدائيتين هي حركة مستقيمة ومنتظمة التغير وأن عجلة الحركة المحصلة هي قطر متوازي الاضلاع المنشأ على عجلتي الحركتين المركبتين

فاذا فرض ان نقطة ا شرعت تتحرك على المستقيم اب بحركة منتظمة العجلة وبدون سرعة ابتدائية بحيث انها تأتي في نقطة ب في نهاية الزمن ز اثناء تحرك الخط اب بالتوازي لنفسه بحركة منتظمة العجلة أيضا ونهايته ا تقطع المسافة احـ في مدة الزمن ز المذكور فان النقطة ا تأتي في نقطة ء في نهاية هذا الزمن ويكون حـء = اب

فنبرهن أولا على أن المتحرك يسير من ا الى ء على القطر اء من متوازي الاضلاع

ولذلك نفرض ان ـــ هـ هو الوضع الذي يشغله المستقيم اب في نهاية الزمن زَ فيكون

$$\frac{\text{اـ}}{\text{احـ}} = \frac{\text{زَ}^2}{\text{ز}^2} \quad \text{بموجب ما تقدم}$$

ولكن في اثناء الزمن زَ المذكور يكون المتحرك قطع المسافة س على اتجاه المستقيم اب ويكون

$\frac{س}{اب} = \frac{ن^٢}{ن^٢}$ ومنها يحدث

$\frac{س}{اب} = \frac{اے}{احـ}$

ولكن حيث أن $\frac{ےم}{حـ ء}$ أو $\frac{ےم}{اب} = \frac{اے}{احـ}$ يكون

$س = ےم$

وحينئذ فالنقطة م تكون موجودة دائما على اء ويكون حينئذ خط سيرها مستقيما ومتجها فى اتجاه قطر متوازى الاضلاع ا ب ء حـ

وثانيا نبرهن على أن المتحرك يتحرك بحركة منتظمة التغير

ولذلك يقال أنه من النسب $\frac{ام}{اء} = \frac{اے}{احـ} = \frac{ن^٢}{ن^٢}$ يتضح أن حركة النقطة م منتظمة التغير

وثالثا نبرهن على أن عجلة المتحرك تكون مبينة بقطر متوازى الاضلاع المنشأ على عجلتى الحركتين المركبتين

لأنه اذا كان ن هى الوحدة الزمنية فيكون ا ب ، احـ ، ٢ اء هى انصاف عجلات الحركتين المركبتين والحركة المحصلة

فاذا كان ب ، بَ هما عجلتا الحركتين المركبتين ، ف هى عجلة الحركة المحصلة فانه يحدث

$ف^٢ = ب^٢ + بَ^٢ + ٢ ب بَ حتا ا$

الحركة المنتظمة ـ الحركة المنتظمة التغير

حركة المقذوفات

الجسم المقذوف افقيا ـ اذا اعتبرت حركة متحرك محصلة حركتين آتيتين احداها منتظمة فى اتجاه الافقى اس سرعتها عَ والاخرى منتظمة العجلة فى اتجاه الرأسى اص عجلتها حـ

فأنه فى نهاية الزمن ن يكون المتحرك فى نقطة ء التى هى رأس المستطيل ا ب ء حـ شكل ٢٦ الذى فيه

$اب = عَ ن$ ، (١)

$احـ = \frac{حـ ن^٢}{٢}$ (٢)

وحينئذ من معادلة (١) يحدث

$ن = \frac{اب}{عَ}$

وعليه تؤول معادلة (٢) الى

$احـ = \frac{حـ}{٢} \times \frac{اب^٢}{عَ^٢}$

ومنها يكون $\frac{اب^٢}{احـ} = \frac{٢ عَ^٢}{حـ}$ لكن $\frac{٢ عَ^٢}{حـ}$ كمية ثابتة

فحينئذ تكون الاحداثيات الرأسية لخط السير اء المقطوع بالمتحرك مناسبة لمربعات الاحداثيات الافقية وعليه فيكون قطعا مكافئا محوره اص ورأسه نقطة ا واذا جعل اب = ص ، احـ = س ، $\frac{عَ^٢}{حـ} = ه$ فأن المعادلة السابقة تؤول الى $ص^٢ = ٢ ه س$.

شكل ٢٦

الجسم

الجسم المقذوف على زاوية حيثما اتفقت ـ اذا فرض جسم مقذوف على زاوية ى بسرعة ع وكان له حركتين آنيتين احداهما منتظمة فى اتجاه اب والاخرى منتظمة التغير منسوبة للتثاقل ومتجهة من اعلاه الى اسفل بعجلتها حـ وكان المطلوب معرفة خط السير فانه يلزم تعيين وضع المتحرك فى نهاية الزمن ز

خط السير ـ اذا لم يكن للمتحرك سوى السرعة ع فى نهاية الزمن ز فانه يقطع المسافة (شكل ٢٧) الناتجة من المعادلة

اب = ع ز

ولكن فى هذه المدة يؤثر التثاقل عليه ويخفضه بكمية تعلم من القانون

ب م = حـ ز² / ٢

وحينئذ فالمتحرك يكون موجودا فى نقطة م ويكون وضع النقطة م معينا اذا علم اء ، ءم

ولذلك نفرض أن اء = س ، ءم = ص مع ملاحظة أن ءم = ب ء ـ ب م وحينئذ يحدث

س = ع ز حتا ى ...... (١)

ص = ع ز حا ى ـ حـ ز² / ٢ ... (٢)

شكل ٢٧

وبواسطة هاتين المعادلتين يمكن تعيين وضع المتحرك فى أى لحظة فاذا حذف الزمن ز من معادلتى (١) ، (٢) فانه يحصل على معادلة خط السير هكذا

ص = س طا ى ـ حـ س² / ٢ ع² حتا² ى

وهى معادلة القطع المكافئ

سعة الرمى ـ اذا فرض ان هـ هى النقطة التى فيها يأتى المتحرك ثانيا على الافقى المار بنقطة الابتداء فان المسافة اهـ تسمى بسعة الرمى وفى هذه النقطة هـ يكون الاحداثى الرأسى معدوما وحينئذ يمكن ايجاد مقدار سعة الرمى بجعل ص = ٠ فى قانون (٢) والبحث فى معادلة (١) عن مقدار س المقابل له لكن متى كان ص = ٠ فيكون

ع ز حا ى ـ حـ ز² / ٢ = ٠ أو

ز (ع حا ى ـ حـ ز / ٢) = ٠

وهذه المعادلة الاخيرة تحقق بجعل ز = ٠

وفى هذه الحالة يكون المتحرك فى نقطة الابتداء ا التى فيها يكون الاحداثى الرأسى معدوما وتحقق ايضا بجعل ع حا ى = حـ ز / ٢ الذى يكون مطابقا للنقطة هـ ولكن فى هذه الحالة

ز = ٢ ع حا ى / حـ ...... (٣)

وبوضع مقدار ن هذا فى معادلة (١) يحصل

$$\text{س} = \text{ع}\,\frac{\text{٢ع جاى}}{\text{جـ}}\,\text{جتاى} = \frac{\text{٢ع}^{2}\,\text{جاى جتاى}}{\text{جـ}} \quad \text{أو}$$

$$\text{س} = \frac{\text{ع}^{2}\,\text{جا٢ى}}{\text{جـ}} \quad \text{وهو مقدار السعة المطلوب} \quad (٤)$$

السعة الأعظم ما يمكن — اذا غيرت الزاوية التى يقذف عليها المقذوف عليها بسرعة ثابتة ع فان سعة الرمى تتغير ولكن حيث أن المعامل جا٢ى يصل الى نهايته العظمى اذا كان جا٢ى = ١ وفى هذه الحالة يكون

$$\text{٢ى} = ٩٠^{\circ} \quad \text{أو} \quad \text{ى} = ٤٥^{\circ}$$

فحينئذ متى قذف المقذوف على زاوية قدرها ٤٥° فأن سعة رميه تكون أعظم ما يمكن وفى هذه الحالة قانون (٤) يؤول الى $\text{س} = \frac{\text{ع}^{2}}{\text{جـ}}$

وهى أكبر مسافة أفقية يقطعها جسم مقذوف بسرعة ع وتسمى بسعة الرمى الأعظم ما يمكن. فاذا كان الجسم مقذوفا رأسيا بنفس السرعة ع فانه يرتفع بناء على ما تقدم بالارتفاع $\text{ء} = \frac{\text{ع}^{2}}{\text{٢جـ}}$ وحينئذ فسعة الرمى الأعظم ما يمكن تكون ضعف الارتفاع الذى يرتقى اليه الجسم المذكور اذا قذف رأسيا بنفس السرعة

ارتفاع الرمى — أكبر مقدار للرأسى ص يسمى بارتفاع الرمى أو سهم الرمى ولاجل الحصول عليه يلزم ان يبحث عن النهاية العظمى للاحداثى ص ولاجل ذلك نحل المعادلة (٢) بالنسبة للزمن ن فيحدث

$$\text{ن} = \frac{\text{ع جاى} \pm \sqrt{\text{ع}^{2}\text{جا}^{2}\text{ى} - \text{٢جـص}}}{\text{جـ}} \quad \ldots\ldots \quad (٥)$$

ولكن حيث ان مقدار ن حقيقيا فيلزم ان يكون

$$\text{ع}^{2}\,\text{جا}^{2}\text{ى} - \text{٢جـص} \geq ٠ \quad \text{ومنه يحدث}$$

$$\text{ص} \leq \frac{\text{ع}^{2}\,\text{جا}^{2}\text{ى}}{\text{٢جـ}}$$

وحينئذ فالنهاية العظمى لمقدار ص تكون

$$\text{ص} = \frac{\text{ع}^{2}\,\text{جا}^{2}\text{ى}}{\text{٢جـ}} \quad \ldots\ldots \quad (٦)$$

والمتحرك يصل الى النقطة الاعلى ما يكون فى نهاية الزمن

$$\text{ن} = \frac{\text{ع جاى}}{\text{جـ}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٧)$$

وبمقارنة معادلة (٧) بمعادلة (٣) يشاهد أن أكبر ارتفاع يطابق لنقطة ـ التى هى منتصف المستقيم ١و وحينئذ فالزمن الذى يستعمله المتحرك فى النزول يكون عين الزمن الذى يستعمله للصعود والمتحرك فى مدتين متساويتى البعد عن الزمن المقابل للنقطة الأعلى ما يكون يكون على ارتفاع واحد لانه بناء على معادلة (٢) يرى ان الاحداثى الرأسى ص دالة بدرجة ثانية بالنسبة للزمن ن وعليه فخط السير يكون متماثلا بالنسبة الى المحور ـ ء ويكون قطعا مكافئا رأسه نقطة ء

الارتفاع

الارتفاع الاعظم ما يمكن - حيث ان ارتفاع الرمى يتغير تبعا للزاوية ى فيكون نهايته عظمى اذا كان
جاى = ١ أو ى = ٩٠°
وبوضع هذا المقدار فى معادلة (٦) يكون

$$\text{ص أو ء} = \frac{\text{ع}^2}{\text{٢ج}}$$

وحينئذ فالمقدار $\frac{\text{ع}^2}{\text{٢ج}}$ يكون هو اعظم ارتفاع يرتقى اليه المقذوف بسرعة ع
تنبيه - فى حالة ما يكون ى = ٤٥° فأن جاى = $\frac{1}{2}$ ويكون

$$\text{ء} = \frac{\text{ع}^2}{\text{٤ج}}$$

وهو نصف مقدار الارتفاع السابق أعنى انه فى حالة ما يكون ى = ٤٥° تكون سعة الرمى اكبر من سهمها باربع مرات

حركات المقذوفات فى الهواء

اعلم ان مقاومة الهواء تغير النتائج السابقة وتغير شكل خط السير ويحدث تقليل ارتفاع الرمى وسعته والفروقات الحادثة محسوسة كما يرى من شكل ٢٨
حيث ان الخط المجزء فى الشكل المذكور يدل على خط السير النظرى والخط المتصل يدل على خط السير فى الهواء

ش ٢٨

ولاجل الوصول الى نقطة معينة ب يلزم قذف المقذوف على زاوية معينة ويتوصل لذلك بواسطة النشانجاه الذى به يمكن جعل ميل البندقية على الزاوية اللائقة

ش ٢٩

الحركات الظاهرية

تعريف - الحركة الظاهرية لنقطة ما بالنسبة لأخرى هو حركة النقطة الأولى مشاهدة لراصد واقف فى النقطة الثانية
ولأيجاد الحركة الظاهرية أو النسبية تستعمل القاعدة الآتية المنسوبة الى المعلم غليلى
قاعدة الحركات النسبية - الحركات النسبية لجملة نقط لا تتغير اذا اعطى للجملة المذكورة حركة انتقالية حيثما اتفقت
وهذه القاعدة المحققة بنتائجها تعتبر بديهية فى علم الميكانيكا
فاذا فرض ان ا ، ب نقطتان متحركتان وكان المطلوب ايجاد الحركة الظاهرية لنقطة ا بالنسبة لنقطة ب يعطى للمجموعة حركة انتقالية مساوية ومضادة لحركة نقطة ب وحينئذ فالحركة النسبية لا تتغير بناء على ما ذكر وعلى هذا فنقطة ب تبقى ساكنة وأما نقطة ا فتكون لها حركتان آتيتان

احداهما حركتها الخاصة والثانية الحركة الانتقالية وحينئذ فحصلة هاتين الحركتين تكون هي الحركة الظاهرية المطلوبة

وقد تسمى حركة النقطة الموجود بها الراصد بالحركة الجاذبة

ولنبحث الآن بواسطة هذه الطريقة عن بعض حركات نسبية بسيطة جدا بفرض ان حركات النقط منتظمة

الحركة النسبية لنقطتين متحركتين على مستقيمين متوازيين - أولا متى كانت الحركتان متحدتي الجهة وفرض ان نقطة ا شكل ٣٠ قطعت في زمن ما المسافة اا َ بحركة منتظمة وأن ب نقطة أخرى قطعت في نفس الزمن بحركة منتظمة المسافة ب بَ وأن المستقيمين اا َ ، ب بَ متوازيان وكان المطلوب ايجاد الحركة النسبية لنقطة ا بالنسبة لنقطة ب فتثبت نقطة ب باعطاء المجموعة حركة انتقالية مساوية ومضادة لحركة النقطة ب

شكل ٣٠

وحينئذ في نهاية الزمن ز المفروض تصل نقطة ا الى اَ بحركتها الخاصة ولكن بسبب الحركة الانتقالية تكون نقطة اَ قد انتقلت الى اِ بحيث يكون اِ اَ = ب بَ وحينئذ تكون نقطة ا قد قطعت المسافة ا اِ واذا اعتبر أن الزمن مساوٍ لثانية واحدة فالطول ا اِ يكون دالا على سرعة الحركة النسبية وعليه اذا رمز بحرف ع لسرعة الحركة النسبية المذكورة وبحرفي ع ، عَ لسرعتي نقطتي ا ، ب يكون

$$ع = ع - عَ$$

وحينئذ فحالة ما تكون الحركتان في جهة واحدة تكون السرعة النسبية مساوية للفرق بين السرعتين المطلقتين

وثانيا - متى كانت الحركتان متضادتي الجهة وفرض ان اا َ ، ب بَ سرعتا المتحركين وكان المطلوب ايجاد السرعة الظاهرية لنقطة ا بالنسبة لنقطة ب فنعطي المجموعة حركة انتقالية مساوية ومضادة لحركة النقطة ب وحينئذ فنقطة ب تصير ساكنة ونقطة ا تكون قد قطعت المسافة اا َ بحركتها الخاصة ، اَ اِ = ب بَ بسبب الحركة الانتقالية وحينئذ تكون نقطة ا قد قطعت المسافة ا اِ وعليه يكون

شكل ٣١

$$ع = ع + عَ$$

وينتج من ذلك أنه متى كانت الحركتان مختلفتي الجهة تكون السرعة النسبية مساوية لمجموع السرعتين المطلقتين وهذا ما يوضح السرعة العظيمة التي يشاهدها ركاب قطارين سائرين في جهتين متضادتين

الحركة الظاهرية لنقطتين متحركتين على مستقيمين حيثما اتفق ـ اذا فرض أن ٢٢ ، ٢٢ سرعتا الحركتين المطلقتين لنقطتي ١ ، ب فنعطى لمجموعة الحركة الانتقالية التي تثبت نقطة ب وحينئذ تكون نقطة ١ لها سرعتان احداهما ٢٢ وهي سرعتها الخاصة والثانية ٢٢ وهي السرعة الانتقالية وبتحصيلهما معا يحصل على ٢٢ التي هي سرعة الحركة الظاهرية وحينئذ فالراصد الواقف في نقطة ب يشاهد ان نقطة ١ تنتقل على اتجاه القطر ٢٢ بسرعة مبينة بطول هذا القطر وعلى هذا يرى أن البحث عن الحركات الظاهرية يؤول الى تحصيل الحركات الآتية

(شكل ٣٢)

ولنذكر الارتباطات الواقعة بين السرعة النسبية والسرعة المطلقة لنقطة مادية متحركة وبين سرعة نقطة الابتداء أى النقطة المنسوب اليها الحركة النسبية فنقول

أولا أن السرعة النسبية هي محصلة السرعة المطلقة للنقطة المادية المتحركة وسرعة نقطة الابتداء مأخوذة في الجهة المضادة

وثانيا ـ اذا مد ٢٢ من جهة ٢ على استقامته وأخذ عليه ٢ء = ٢٢ فأن ٢ء يكون عبارة عن سرعة نقطة الابتداء فاذا وصل ٢ء يكون ٢ ء ٢ ٢ متوازى اضلاع ويكون ٢٢ قطراً له وينتج ان السرعة المطلقة للنقطة المتحركة تكون محصلة السرعة النسبية وسرعة نقطة الابتداء مأخوذة في الجهة الأصلية لها

وثالثا ـ اذا مد ٢٢ على استقامته من جهة ٢ وأخذ عليه ٢و = ٢٢ ووصل مستقيم و ء فأن ٢ء يكون قطرا لمتوازى الاضلاع ٢٢ ء و وتكون حينئذ سرعة نقطة الابتداء محصلة السرعة المطلقة للنقطة المتحركة والسرعة النسبية مأخوذة في الجهة المضادة

في انتقال الحركات

تنقسم الحركات الأصلية الى أربعة أقسام كالآتى

الأول الحركة المستقيمة المستمرة

الثانى الحركة المستقيمة المترددة

الثالث الحركة المستديرة المستمرة

الرابع الحركة المستديرة المترددة

وكل من الحركات المذكورة يمكن نقله الى حركة أخرى من جنسه اومغايرة له . وهذا يؤدى الى ستة عشر انتقالا للحركة كل منها يحصل بطرق مختلفة بحسب النتيجة المطلوبة

ويمكن بيان الانتقالات الستة عشر كالآتى

- حركة مستقيمة مستمرة
  - الى حركة مستقيمة
    - مستمرة
    - مترددة
  - الى حركة مستديرة
    - مستمرة
    - مترددة
- حركة مستقيمة مترددة
  - الى حركة مستقيمة
    - مستمرة
    - مترددة
  - الى حركة مستديرة
    - مستمرة
    - مترددة
- حركة مستديرة مستمرة
  - الى حركة مستقيمة
    - مستمرة
    - مترددة
  - الى حركة مستديرة
    - مستمرة
    - مترددة
- حركة مستديرة مترددة
  - الى حركة مستقيمة
    - مستمرة
    - مترددة
  - الى حركة مستديرة
    - مستمرة
    - مترددة

وهذه الحركات تستعمل فى الآلات الميكانيكية وغيرها بحسب لزومها ويتخذ لها الاعضاء اللازمة لامكان حصولها فمثلا لنقل الحركة المستديرة المستمرة الى حركة مستديرة مستمرة تستعمل السيور والطنابير والطنابير المدرجة والاسطوانات المحتكة مع بعضها والتعاشيق الاسطوانية والمخروطية والتعاشيق ذات القلاوظ وغير ذلك ولنقل الحركة المستقيمة المترددة الى حركة مستديرة مستمرة تستعمل الاذرعة والمنويلات ومتوازى اضلاع وات والبلانسيه

ولنقل الحركة المستديرة المستمرة الى حركة مستقيمة مترددة تستعمل الاكسنتريكات

ولنقل الحركة المستديرة المستمرة الى حركة مستقيمة مستمرة تستعمل البريمات والملاقيف

ولنقل الحركة المستقيمة المستمرة الى حركة مستقيمة مستمرة يستعمل البكر والاحبال وهكذا

تمرينات

(١) المطلوب تحصيل حركتين مختلفتين

(٢) اذا قذف جسم على زاوية قدرها ى بسرعة قدرها ع فما هو اتجاهه ومقدار سرعته فى نهاية الزمن ز واجراء المناقشة

(٣) على اى زاوية يمكن قذف جسم بسرعة ع بحيث يصل نقطة احداثياها د ، ك وتحديد نقط المستوى الذى يمكن ان يصله المقذوف وتعيين القطع المكا فؤ المحقق للعمل

(٤) ما مقدار السرعة التى قذف بها مقذوف افقيا بعد معلومية أنه قطع افقيا مسافة قدرها ى ورأسيا مسافة قدرها هـ

(٥) المطلوب ايجاد الحركة النسبية لنقطة ا بالنسبة لنقطة ب فى الأحوال الآتية

أولا يفرض ان نقطة ا هى المتحركة فقط

ثانيا يفرض ان نقطة ا ثابتة ونقطة ب هى المتحركة

ثالثا يفرض ان نقطة ا تسقط رأسيا بحركة منتظمة العجلة ونقطة ب متحركة افقيا بحركة منتظمة

(٦) سفينة تتقدم فى اتجاه ما بسرعة قدرها ع وأن الريح متجهة فى اتجاه آخر بسرعة عَ والمطلوب معرفة الاتجاه الذى يأخذه دليل الرياح

(٧) المطلوب معرفة الحركة الظاهرية لنقطة ثابتة بالنسبة لنقطة أخرى خط سيرها مضلع

(٨) المطلوب معرفة الحركة الظاهرية للشمس مشاهدة من سطح الأرض

(٩) اذا كان متحركان يتحركان على مضلعين مختلفين فما تكون الحركة النسبية لأحدهما بالنسبة للآخر

(١٠) المطلوب معرفة الحركة الظاهرية لكوكب مشاهد من سطح الأرض

الديناميك

القواعد الأساسية

الديناميك علم يبحث فيه عن الارتباطات الواقعة بين القوى وبين الحركات التى تحدثها

قوانين علم الديناميك مؤسسة على أربع قواعد اساسية ناتجة من مشاهدة الظواهر وهذه القواعد لم تكن بديهية فى مبدأ الأمر بل أن رجالا من العلماء مثل كيبلير وغليلى ونيوتون هم الذين استكشفوها من بين الحركات المختلفة التى شاهدوها وتلك القواعد لا يمكن تحقيقها مباشرة بل انها تحقق بالمطابقة الحاصلة بين نتائجها وبين الحركات المشاهدة

القاعدة الاولى ـ القصور الذاتى

(كيبلير)

قاعدة القصور الذاتى ـ أولا أن النقطة المادية الساكنة لا يمكن ان تحرك من نفسها وثانيا أن النقطة المادية المتحركة لا يمكن من نفسها ان تغير سرعتها مقدارا واتجاها وحينئذ فتكون حركتها مستقيمة ومنتظمة ان لم تقاوم بتأثير خارجى

ويمكن التسليم بالجزء الاول من قاعدة القصور الذاتى وأما الجزء الثانى فيرى أنه مناقض لما هو مشاهد للعيان حيث ان سرعة جميع الأجسام التى يصير تحركها تتناقص الى ان تنعدم ولكن يلزم أن يفهم ان ذلك ناشئ عن الاحتكاك ومقاومة الاواسط وهكذا اذ أنه بمجرد تقليل تأثير هذه الأسباب المقاومة تطول مدة الحركة عما كانت قبلا ويعلم من ذلك حينئذ أنه اذا امكن اعدام تلك المقاومات فأن السرعة تصير ثابتة

وينتج من قاعدة القصور الذاتى مباشرة امران

الاول أن حركة نقطة مادية يلزم ان تكون ناشئة عن اسباب خارجية مؤثرة على هذه النقطة أو سبق تأثيرها عليها

الثانى ان كل نقطة لا يقع عليها ادنى تأثير خارجى تكون ساكنة أو ذات حركة مستقيمة منتظمة أما الانسان والحيوانات فتتحرك بالارادة لأنه يوجد فيهم أمر غير مادى وغير منقاد لقوانين القصور الذاتى

والقصور الذاتى للمادة يوضح ظواهر عديدة منها أن الانسان الواقف فى عربة سارت فجأة يميل للوقوع فى الجهة العكسية لحركة العربة حيث ان قدميه مجذوبان بالعربة وجزءه العلوى مائل للبقاء فى محله ويحصل عكس ذلك اذا وقفت العربة دفعة واحدة

ومنها أنه اذا نقل بدون احتراس اناء مملوء بالماء فان الماء يندفق فى الجهة العكسية لحركة الاناء المذكور

ومنها حصول الخطر عند الوثوب بدون احتراس من عربة سائرة لأنه عندما تلامس الأرجل سطح الارض يكون الجزء العلوى من الجسم مستمرا فى الحركة بالسرعة المكتسبة ويحصل تصادمه مع الأرض بقوة تكون عظيمة كلما كانت الحركة سريعة

ومنها لتثبيت القدوم فى نصابه يلزم طرق النصاب المذكور فى مانع ثابت وحينئذ فالقدوم يستمر فى الحركة مع زنق الباقى خشب النصاب

واخيرا فالقصور الذاتى ايضا هو الذى يوضح لنا اسباب المصائب الجسيمة الناشئة عن تصادم سفينتين أو قطارين متحركين بسرعتين عظيمتين

القاعدة الثانية ـ الفعل ورد الفعل

(نوتون)

التساوى بين الفعل ورد الفعل ـ اذا أثرت نقطة مادية على نقطة مادية اخرى فأن النقطة الأخيرة تؤثر على الأولى بقوة مساوية ومضادة للتأثير الواقع عليها منها

وباستعمال نص منطوق نوتون يقال ان رد الفعل يكون دائما مساويا للفعل ومخالفا له فى الجهة فمثلا اذا ضغط باليد على طاولة فانه يستشعر بحصول رد فعل من الطاولة المذكورة على اليد

واذا

واذا أوثق من السفينة على شيء ثابت فى الشاطئ بواسطة حبل فان السفينة المذكورة تقرب من الشيء المذكور كما لو كان جذب تلك السفينة حاصلا من الشاطئ بقوة مساوية ومضادة للأولى فهذه القوة الأخيرة التي ترى أنها آتية من الشيء الثابت هى عبارة عن رد الفعل

واذا لم تحدث الأرض رد فعل مائل فلا يتيسر السير عليها كما يتضح ذلك من الصعوبة التي تنشأ من السير على أرض رخوة أو على سطح أملس

والالتصاق الحاصل بين عجل وابور اللوكوموتيف وبين قضبان السكة الحديد هو السبب فى امكان سير اللوكوموتيف عليها وجذب القطر معه

تنبيه بناء على قاعدة التصور الذاتى تكون كل قوة مؤثرة على نقطة مادية مثل ا صادرة من نقطة مادية أخرى مثل ب وحينئذ بناء على القاعدة الحالية تكون نقطة ب متأثرة دائما بقوة صادرة من نقطة ا وعلى هذا فهاتان القوتان وهما تأثير نقطة ب على ا ورد فعل نقطة ا على ب تكونان متساويتين ومختلفتى الجهة ومتجهتين فى اتجاه المستقيم اب وزيادة على ذلك تكون هاتان القوتان قوتى جذب أو دفع على حسب كونهما تميلان لتنقيص المسافة اب أو لازديادها

القاعدة الثالثة ـ الحركة النسبية

(غليلى)

عدم تعلق حالة سكون أو حركة جسم بتأثير القوة الواقعة عليه ـ تأثير أى قوة على نقطة مادية لا يتعلق بالحركة المكتسبة من قبل بهذه النقطة وهذه القاعدة تسمى غالبا بقانون الحركة النسبية لانه بناء على هذه القاعدة متى كانت جملة غير متغيرة ونقطة غير مرتبطة بها متحركتين حركة واحدة انتقالية مستقيمة ومنتظمة ثم تأثرت النقطة المذكورة بقوة فالحركة التى تأخذها بالنسبة للجملة المذكورة اعنى حركتها النسبية تكون عين الحركة التى تأخذها تلك النقطة لو كانت النقطة والجملة المذكورتين ساكنتين فى الأصل

وبعبارة أخرى يقال أن الحركة النسبية غير متعلقة بحركة الجذب وسنشتغل بدراسة بعض أحوال مهمة مستنتجة من هذه القاعدة فنقول

الحركة الناشئة من قوة ثابتة

تعريف ـ القوة تكون ثابتة متى كان اتجاهها وشدتها ثابتين وقد توجد ثلاث حالات مختلفة بحسب ما تكون النقطة المادية خارجة من السكون أو لها سرعة ابتدائية فى اتجاه القوة او كان اتجاه السرعة الابتدائية المذكورة حيثما اتفق

ففى الحالتين الأوليين ينشأ عن القوة الثابتة حركة مستقيمة منتظمة التغير

الحالة الأولى ـ النقطة المادية خارجة من السكون ـ القوة الثابتة المؤثرة على نقطة مادية مطلقة خارجة من السكون تحدث لها حركة مستقيمة منتظمة العجلة

لأنه اذا فرض ان ع هي السرعة الناتجة من تأثير القوة الثابتة على النقطة المادية في نهاية الوحدة الاولى من الزمن ثم انعدم تأثير القوة في هذه اللحظة

فبناء على قاعدة القصور الذاتي تستمر النقطة المذكورة في التحرك بحركة منتظمة سرعتها ع ولكن بتأثير القوة في مدة الوحدة الثانية من الزمن يكون للمتحرك سرعة جديدة ع حيث أن القوة تؤثر على النقطة المادية كما لو كانت ساكنة وبضم هذه السرعة الجديدة الى السرعة المكتسبة تكون سرعة المتحرك في نهاية وحدتين من الزمن هي ٢ع وبالمثل في نهاية ثلاث وحدات من الزمن تكون السرعة مساوية الى ٣ع وحينئذ اذا رمزنا بالرمز $ع_ن$ للسرعة في نهاية وحدات من الزمن قدرها ن يكون

$$ع_ن = ن ع$$

أعني ان السرعة تكون مناسبة للزمن وعليه فتكون الحركة منتظمة العجلة وحيث ان القوة ثابتة الاتجاه فتكون الحركة مستقيمة

الحالة الثانية ــ النقطة المادية لها سرعة ابتدائية متجهة جهة القوة ــ متى كانت نقطة مادية لها سرعة ابتدائية واقع عليها قوة ثابتة في اتجاه السرعة المذكورة تكون حركة تلك النقطة مستقيمة ومنتظمة التغير وحيث ان هذه القوة يمكن ان تؤثر في جهة السرعة الابتدائية أو في الجهة المضادة فيقال

اولا ــ اذا كانت القوة متجهة في جهة السرعة الابتدائية تكون الحركة منتظمة العجلة

لانه اذا كانت ا هي السرعة الابتدائية ، ب السرعة التي يكتسبها المتحرك في نهاية ثانية واحدة بتأثير القوة المذكورة فبالبرهنة كما في الحالة الأولى يرى ان السرعة ع في نهاية الثانية الأولى تتركب من السرعة الابتدائية ا ومن السرعة ب ويكون

$$ع_١ = ا + ب \quad ،$$
$$ع_٢ = ا + ٢ب \quad ،$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \quad ،$$
$$ع_ن = ا + ن ب$$

وعلى هذا فتكون الحركة منتظمة العجلة وعجلتها ب

وثانيا ــ اذا كانت القوة متجهة في جهة مضادة لجهة السرعة الابتدائية تكون الحركة منتظمة التقصير لأنه حيث كانت العجلة متجهة في جهة مضادة لجهة السرعة الابتدائية فيلزم تغيير ب بالمقدار ــ ب في القوانين السابقة وحينئذ يكون

$$ع_١ = ا - ب \quad ،$$
$$ع_٢ = ا - ٢ب \quad ،$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \quad ،$$
$$ع_ن = ا - ن ب$$

وهذا

وهذا القانون الأخير هو قانون سرعة حركة منتظمة المتغير بمجملها ـ ب

وبالعكس اذا كان لنقطة مادية حركة مستقيمة ومنتظمة التغير تكون تلك النقطة متأثرة بقوة ثابتة متجهة في اتجاه الحركة المذكورة لأنه حيث كانت الحركة غير منتظمة فالمتحرك بناء على قاعدة القصور الذاتي يكون متأثرا على الدوام بقوة وهذه القوة تكون ثابتة والا فالعجلة تتزايد أو تتناقص تبعا للقوة المذكورة وتكون ايضا في اتجاه حركة المتحرك لأنه اذا كان للقوة في لحظة ما اتجاه مغاير لاتجاه الحركة المذكورة فالمتحرك يتبع محصلة الحركة الناشئة من القوة مع الحركة السابقة ولا يتبع حينئذ اتجاه حركته الأصلية وهذا مخالف للفرض

وعلى هذا متى كانت الحركة عجلية فالقوة تكون في جهة السرعة الابتدائية ومتى كانت تقصيرية فتكون القوة في الجهة المضادة

تنبيهان

الأول ـ التثاقل قوة ثابتة ـ لأنه قد شوهد فيما تقدم ان حركة جسم ساقط في الفراغ بتأثير التثاقل منتظمة العجلة وحينئذ فثقل الجسم يؤثر في كل مكان كقوة ثابتة

الثاني ـ كل قوة تؤثر بمفردها على جسم لا يمكن ان تحدث له حركة منتظمة

لأن الحركة المستقيمة المنتظمة يمكن ان تنتج أولا من قوة انقطع تأثيرها بحيث ان الجسم يستمر بعد ذلك في التحرك بناء على سرعته المكتسبة وثانيا من استمرار انعدام عجلة القوة المحركة بتأثير الاحتكاك أو بسبب آخر

ويفهم من ذلك حينئذ انه اذا كان جسم متحرك بانتظام فلا يكون متأثرا بادنى قوة أو ان القوى الواقعة عليه تكون متزنة

وهذا ما يعبر عنه بالموازن الديناميكي في مقابلة التوازن الاستاتيكي الذي يستلزم ان يكون الجسم ساكنا

وحينئذ لأجل ان يكون للعربة سرعة منتظمة على طريق افقي يلزم ان يحدث المحرك بالاستمرار جذبا مساويا للمقاومات اللازم ان تتغلب عليها لانه لو كان الجذب اكبر من المقاومات المذكورة لكانت الحركة عجلية

ولا يخفى أن التأثير اللازم حصوله يتناقص كلما نقص الاحتكاك كما هو مشاهد بالنسبة للعربات التي تسير على قضبان من الحديد

الحالة الثالثة ـ السرعة الابتدائية ليست في اتجاه القوة

اذا فرض مثلا نقطة مادية ثقيلة مقذوفة في اتجاه غير رأسي ا ب كما في شكل ٣٣ يقال أنه لو لم تكن النقطة ثقيلة لتحركت بناء على السرعة الابتدائية حركة مستقيمة منتظمة كما تقدم وانه اذا سقطت تلك النقطة بتأثير التثاقل فقط لكانت حركتها

ش ٣٣

مستقيمة ومنتظمة المتغير كما تقدم أيضا
ولكن بناء على القاعدة الثالثة هاتان الحركتان توجدان في آن واحد بدون أن تؤثر إحداهما على الأخرى وحينئذ فتحصل الحركة الحقيقية للمقذوف على فرض أنه ساقط على اتجاه الخط الرأسي اح مع اعتبار انتقال الرأسي المذكور بالتوازي لنفسه بحيث ان النقطة ا المذكورة تقطع المستقيم اب بحركة منتظمة سرعتها السرعة الابتدائية أعني انه بتحصيل الحركة المستقيمة المحددة بالسرعة الابتدائية مع الحركة المستقيمة المنتظمة التغير الناتجة من التثاقل كما تقدم يكون خط السير الناتج قطعا مكافئا

تنبيهان

الأول ـ اعلم ان سرعة المتحرك المذكور في لحظة ما هي محصلة سرعة الحركة المنتظمة وسرعة الحركة المتغيرة في اللحظة المذكورة

الثاني ـ حيث انه عند انعدام تأثير القوة في لحظة ما تصير الحركة مستقيمة ومنتظمة فتكون سرعة المتحرك في لحظة ما عين سرعة الحركة المنتظمة التالية للحركة المتغيرة في تلك اللحظة التي ينقطع فيها تأثير القوة

القاعدة الرابعة

(غليلي)

عدم تعلق تأثيرات القوى الآنية ببعضها ـ اعني انه اذا اثرت جملة قوى آنية على نقطة مادية فتأثير كل منها يكون حاصلا كما لو كانت كل قوة مؤثرة بمفردها
وحينئذ اذا خرج المتحرك من السكون فالحركة الناتجة من تلك القوى الآنية تحصل بناء على ما تقدم بتركيب الحركات المختلفة المستقيمة والمنتظمة المتغير الناتجة من القوى المذكورة كما لو كان كل منها مؤثر بمفرده وعليه فتكون الحركة المحصلة مستقيمة ومنتظمة المتغير ويجعلها محصلة لعجلات الحركات المركبة لها وهذه الحركة الأخيرة تكون بالضبط هي حركة محصلة القوى الآنية المذكورة المحصلة بناء على قاعدة كثير اضلاع القوى اذا اثرت تلك المحصلة بمفردها على النقطة المادية المفروضة

تنبيهان

الأول ـ اذا كان للنقطة المادية سرعة ابتدائية فتحصل حركتها بتركيب الحركة المستقيمة المنتظمة المقابلة لتلك السرعة الابتدائية مع الحركة المستقيمة المنتظمة التغير التي تحدثها لها محصلة القوى الواقعة عليها عندما تكون تلك النقطة خارجة من السكون

الثاني ـ اذا كانت محصلة القوى الواقعة على النقطة المادية معدومة فتأثيرات تلك القوى يمحو بعضها بعضا والنقطة المادية تصير كما لو كانت غير متأثرة بأدنى قوة
فان لم يكن للنقطة المادية المذكورة سرعة ابتدائية فانها تسكن والقوى الواقعة عليها لا تحدث لها أدنى حركة وتكون متزنة توازنا استاتيكيا

وان كان

وان كان لتلك النقطة سرعة ابتدائية فانها تكون متحركة حركة مستقيمة منتظمة والقوى المذكورة لا تغير حركتها وتكون متزنة توازنا ديناميكيا

ومن القاعدة الرابعة المذكورة يستنتج التقدير الديناميكي للقوى

التقدير الديناميكي للقوى

قد تقدم في علم الاستاتيك كيفية تقدير القوى بالديناموميتر الذي يقتضي فيه ان تكون تلك القوى متزنة ويسوغ أن الحركة الناتجة من هذه القوى تؤدي أيضا الى تعيين شدتها أعني نسبتها الى الكيلوجرام في التناسب الحاصل بين القوى الثابتة وبين العجلات - نظرية - النسبة بين القوتين الثابتتين الواقعتين بالتوالي على نقطة مادية واحدة كالنسبة بين العجلتين الناتجتين منهما

أعني اذا كان ق ، قَ قوتين ثابتتين ، و ، وَ العجلتين الناتجتين منهما متى اثرتا على نقطة مادية واحدة على التوالي يكون

ق : قَ :: و : وَ

لانه اذا كان للقوتين ق ، قَ المذكورتين مقياس مشترك قدره ج يكون

ق = ن ج ،

قَ = نَ ج ومنها يحدث

ق/قَ = ن/نَ

واذا فرض ان و هي العجلة الناتجة من القوة الثابتة ج الواقعة على النقطة المفروضة فان العدد ن من القوى ج الواقعة في آن واحد على تلك النقطة يحدث بناء على القاعدة الرابعة عجلة قدرها ن و وحينئذ فالعجلة و الناتجة من القوة ق تكون مساوية الى ن و والعجلة وَ الناتجة من القوة قَ تكون حينئذ مساوية الى نَ و اعني يكون

و = ن و ، وَ = نَ و ومنها يحدث

و/وَ = ن/نَ وعليه يكون

ق/قَ = و/وَ وهو المطلوب برهانه

وحيث ان هذه النظرية حقيقية مهما كان صغر مقدار المقياس المشترك ج فيمكن البرهنة على صحتها أيضا اذا لم يكن للقوتين ق ، قَ مقياس مشترك فنقول

نفرض ان ق = ن ج ، و = ن و

وحيث انه في هذه الحالة لا تشتمل القوة قَ على عدد صحيح من القوى الجزئية ج فحينئذ يكون مقدارها محصورا بين عددين صحيحين متواليين رمزهما نَ ، نَ + ١ من القوى الجزئية المذكورة وبناء عليه يكون

نَ ج < قَ < (نَ + ١) ج

وبالقسمة على ق = ن ه₁ يحدث

نَ/ن < قَ/ق < (نَ + ١)/ن

وحيث ان عجلة القوة نَ ه₁ تساوى نَ و₁ وعجلة القوة (نَ + ١) ه₁ تساوى (نَ + ١) و₁ فتكون العجلة وَ للقوة قَ محصورة أيضا بين العجلتين المذكورتين ويكون

نَ و₁ < وَ < (نَ + ١) و₁

وبالقسمة على و = ن و₁ يحدث

نَ/ن < وَ/و < (نَ + ١)/ن

ويرى من ذلك ان النسبتين قَ/ق ، وَ/و محصورتان بين النهايتين نَ/ن ، (نَ + ١)/ن اللتين لا تفرقان عن بعضهما الا بمقدار يساوى ١/ن وهذا المقدار صغير بقدر ما نزاد حيث ان ن عدد اختيارى وبناء عليه تكون النسبتان قَ/ق ، وَ/و متساويتين بالضبط اعنى يكون

قَ/ق = وَ/و وهو المطلوب

ويمكن تحقيق هذه النظرية المهمة بواسطة آلة آتود بان يوقع بالتوالى ثقلان اضافيان مختلفان على ثقل كلى واحد وتعين عجلة الحركة الحادثة من كل تجربة بملاحظة ان هذه العجلة تكون مساوية ضعف المسافة المقطوعة فى مدة الثانية الأولى من السقوط

ولاجل ذلك نأخذ ابتداء ثقلين كل منهما مساوٍ الى ه وثقلا آخر اضافيا ق ونفرض ان العجلة المحصلة هى و ثم نأخذ ايضا ثقلين كل منهما مساو الى ه₁ وثقلا آخر اضافيا ق₁ بحيث يكون

٢ ه₁ + ق₁ = ٢ ه + ق

ونفرض أن العجلة الجديدة المحصلة هى و₁ (بملاحظة أن الثقل الكلى المستعمل فى كلتا التجربتين هو أحد الثقلين ٢ ه₁ ، ٢ ه) وحيث ان القوتين ق ، ق₁ حركتا على التوالى ثقلا كليا واحدا أى أنهما اثرتا على جسم واحد على التوالى فيكفى ان يتحقق من ان نسبة هاتين القوتين الى بعضهما كنسبة العجلتين الحادثتين منهما ولذلك يلزم حساب المقدار الرقمى لكل من هاتين النسبتين ق/ق₁ ، و/و₁ والتأكد من تساوى الناتجين المحصلين

نظرية — النسبة بين القوى المؤثرة على جسم ما وبين العجلات التى تحدثها له ثابتة

وللبرهنة على ذلك يقال حيث أنه علم مما تقدم أن نسبة القوى الى بعضها كنسبة العجلات فيكون

ق/قَ = و/وَ أو يكون ق/و = قَ/وَ

واذا اثر على الجسم المفروض بقوة أخرى قً فانه يكون أيضا

ق/و = قَ/وَ = قً/وً

ويفهم من ذلك ان القوى الواقعة على جسم واحد تتناسب للعجلات التى تحدثها له وهو المطلوب فاذا كانت احدى هذه القوى هى ثقل الجسم فالعجلة تكون ح ويحدث

$\frac{ق}{و} = \frac{ث}{ح}$ ومنها يحدث

$ق = \frac{ث}{ح} و$

المجسم

تعريف — مجسم الجسم هو النسبة الثابتة بين شدة القوة المؤثرة على الجسم المذكور وبين العجلة التي تحدثها له تلك القوة وهذه النسبة الثابتة للجسم الواحد والمتغيرة من جسم الى آخر لها أهمية عظيمة في علم الميكانيك

فاذا رمزنا بحرف م لمجسم الجسم فبناء على التعريف يكون

$م = \frac{ق}{و}$ ومنه يحدث

$ق = م و$

أعني ان القوة تساوي حاصل ضرب مجسم الجسم المؤثرة عليه في عجلة الحركة التي تحدثها له ومتى كانت القوة المفروضة هي ثقل الجسم فانه يكون

$م = \frac{ث}{ح}$

ولكن حيث ان ثقل الجسم مبين بالكيلوجرامات وعجلة التثاقل مبينة بالأمتار فلاجل ايجاد النسبة بين هذين العددين يلزم اعتبارهما مبهمين وحينئذ فيكون للجسم عددا مبهما كذلك

تنبيهان

الأول — مجسمات الاجسام تكون مناسبة لاثقالها في المحل الواحد من سطح الارض

لأنه من المعادلة $م = \frac{ث}{ح}$ يحدث

$ث = م ح$ وبالمثل يكون

$ثَ = مَ ح$ ومنها يحدث

$\frac{ث}{ثَ} = \frac{م}{مَ}$ وهو المطلوب

ويفهم من ذلك انه يمكن تقدير مجسمات الأجسام باثقالها وهذا ما يطابق تماما الفكر المتخذ من أجله مجسم الجسم

الثاني — مجسم الجسم لا يتغير مهما اختلفت الحالات التي وجد فيها الجسم

لأنه اذا تغير التثاقل فالثقل والعجلة يتغيران تبعا له بنسبة واحدة بموجب ما تقدم وعليه فالنسبة بينهما التي هي عبارة عن مجسم الجسم تكون ثابتة

وحدة المجسم — لأجل الحصول على وحدة المجسم نفرض ان م = ١ في المعادلة

$م = \frac{ق}{و}$ .... (١) فيكون

$١ = \frac{ق}{و}$ ومنها يحدث

$ق = و$

أعنى ان وحدة الجسم هى الجسم الذى ينشأ عنه ان كل قوة تؤثر على الجسم المذكور تكون مبينة بنفس العدد الدال على العجلة التى تحدثها تلك القوة لذلك الجسم

فإذا كانت القوة المؤثرة على الجسم هى ثقله فتؤل المعادلة

ق = و الى

ث = ح

وعلى ذلك يكون الثقل المنسوب لوحدة الجسم فى محل ما مبينا بنفس العدد الدال على مقدار العجلة ح فى المحل المذكور

ففى القاهرة الثقل المنسوب لوحدة الجسم يزن ٩٫٧٩١٠ كيلوجرام وفى باريس يزن ٩٫٨٠٨٨ كيلوجرام وفى لندره يزن ٩٫٨٣ كيلوجرام

فاذا فرضنا فى معادلة (١) ان ق = ١ و و = ١ يكون م = ١ وحينئذ يمكن ان يقال ان وحدة الجسم هى جسم الجسم الذى اذا اثرت عليه قوة قدرها كيلوجرام واحد حدثت له عجلة قدرها متر واحد

فى الارتباطات الواقعة بين القوى والجسمات والعجلات

نظرية — القوى الثابتة مناسبة لحاصل ضرب جسمات الأجسام فى العجلات التى تحدثها تلك القوى للأجسام المذكورة

أو بوجه الأختصار ان القوى الثابتة مناسبة لحاصل ضرب الجسمات فى العجلات

لأنه اذا فرض ان ق، قَ هما القوتان المؤثرتان على جسمين جسمهما م، مَ واحدثتا لهما عجلتين و، وَ فأنه بموجب ما تقدم يكون

$$\frac{ق}{و} = م \quad ، \quad \frac{قَ}{وَ} = مَ \quad \text{أو}$$

$$ق = م و \quad ، \quad قَ = مَ وَ \quad \text{ومنهما يحدث}$$

$$\frac{ق}{قَ} = \frac{م و}{مَ وَ} \quad \text{وهو المطلوب}$$

وبواسطة هذه النسبة يمكن تقدير القوى بالحركات التى تحدثها للأجسام الواقعة عليها تلك القوى

كمية التحرك — كمية التحرك التى يكتسبها جسم ما فى لحظة معينة هى حاصل ضرب جسم الجسم المذكور فى سرعته فى اللحظة المفروضة

نظرية كمية التحرك — النسبة بين اى قوتين كالنسبة بين كمية التحرك الحادثتين منهما فى مدة الزمن عينها لأنه بناء على ما تقدم يكون

$$\frac{ق}{قَ} = \frac{م و}{مَ وَ}$$

وبضرب حدى نسبة الطرف الثانى فى الزمن ز يحدث

$$\frac{ق}{قَ} = \frac{م و ز}{مَ وَ ز}$$

ولكن

ولكن حيث أن وز) وَز عبارة عن سرعتى المتحركين الخارجين من السكون فى نهاية الزمن ز بناء على ما تقدم فيكون

$$\frac{ق}{قَ} = \frac{م ع}{مَ عَ} \quad \text{وهو المطلوب}$$

تنبيه ـ اذا جعل فى المعادلة السابقة ق = قَ يكون

$$1 = \frac{م ع}{مَ عَ} \quad \text{ومنها يحدث}$$

$$\frac{ع}{عَ} = \frac{مَ}{م}$$

أعنى أن النسبة بين السرعتين الحادثتين من قوة واحدة لجسمين مختلفى الجسم كالنسبة العكسية بين جسمى الجسمين المذكورين

وبناء على هذه القاعدة امكن ابطاء حركة المتحركين فى آلة اتود كى يمكن أن ترصد بالسهولة قوانين سقوط الأجسام

ولهذه القاعدة ايضا تطبيق فى رفس الاسلحة النارية أى فى الدفع الذى تحدثه تلك الاسلحة الى الخلف ولبيان ذلك يقال ان انتشار الغازات الناتجة من التهاب البارود يؤثر فى آن واحد على المقذوف وعلى السلاح النارى وحيث أن الجسمين مختلفان اختلافا كبيرا عن بعضهما فتكون سرعة الرجوع الى الخلف أى الرفس صغيرة جدا بالنسبة لسرعة خروج المقذوف وعلى هذا فيلزم الأعتناء عند اطلاق بندقية بضغطها جيدا بالكتف كى يزداد الجسم المتأثر بسرعة الرجوع

دفع القوة ـ يسمى دفع القوة حاصل ضرب تلك القوة فى زمن تأثيرها

نظرية ـ دفع القوة الثابتة المؤثرة على جسم خارج من السكون يكون دائما مساويا لكمية الحركة التى يكتسبها الجسم المذكور

لأنه بناء على ما تقدم يكون

$$ق = م و \qquad \text{وبضرب الطرفين فى ز يحدث}$$

$$ق ز = م و ز \qquad \text{وحيث ان و ز = ع فيكون}$$

$$ق ز = م ع \qquad \text{وهو المطلوب}$$

تنبيه ـ اذا جعل ز = ٠ فى معادلة ق ز = م ع يكون

$$٠ = م ع \qquad \text{ومنها يحدث}$$

$$ع = ٠$$

ويفهم من ذلك أنه لاجل ان تحرك القوة جسما ما يلزم ان تأثيرها يمكث مدة من الزمن ولو صغيرة جدا اذ بدون ذلك لا توجد قوة آنية وعلى هذا اذا اطلقت رصاصة على لوح من الزجاج بالقرب منه فأنها تنفذ منه بدون ان تشعره بخلاف ما اذا اطلقت الرصاصة المذكورة على اللوح المذكور من بعد

كبير فأنها تكسره وذلك لأنه في الحالة الأولى مدة تلامس الرصاصة مع عناصر اللوح الزجاج صغيرة جدا وفي الثانية كبيرة

تطبيقات

لأجل تتميم ماذكرناه على القصور الذاتي وتطبيقا على القواعد السابقة سنذكر بعض تماديف بسيطة تختص بالقصور الذاتي المعتبر قوة وبالقوى المركزية الجاذبة والطاردة التي تطبيقاتها عديدة ومهمة فنقول

قوة القصور الذاتي

من المعلوم ان القوة التي تحدث حركة نقطة مادية تتبين بالارتباط الآتي وهو

$$ق = م و$$

وهذا الارتباط الذي يمكن وضعه على الصورة الآتية وهي

$$ق - م و = ٠$$

يسمح بأن نعتبر م و مقدارا مطلقا لقوة مضادة للقوة ق وهذه القوة الوهمية التي تتزن في كل لحظة مع القوة المحدثة لحركة النقطة المادية تسمى قوة القصور الذاتي لهذه النقطة

ولأجل فهم قوة القصور الذاتي هذه نعتبر في آن واحد مع حركة النقطة المادية المذكورة الجملة المادية الناتج عنها القوة أو التأثير الواقع على تلك النقطة

ولنتصور مثلا جسما مقبوضا عليه باليد وصار تحريك اليد المذكوره بدون ترك ذلك الجسم فيرى ان هذا الجسم يؤثر على اليد المذكوره الجاذبة له بحيث انه متى قلت حركة اليد فالجسم بناء على قاعدة القصور الذاتي يميل لاستمرار حركته فيدفع اليد الى الأمام واذا ازدادت حركة اليد المذكورة فان الجسم بناء على قاعدة القصور الذاتي كذلك يميل لان يحفظ حركته ويحدث تقليل حركة اليد فرد الفعل هذا الناشئ من الجسم على اليد في كل لحظة أو الذي يقاوم مجموعة حيثما اتفقت في أحوال مثل هذه يسمى قوة رد فعل النقطة المادية المذكورة

ولنلاحظ ان قوة رد الفعل هذه هي نفس القوة التي سميناها قوة القصور الذاتي حيث ان قوة رد الفعل المذكورة مساوية ومضادة للفعل أي للقوة المحدثة للحركة التي مقدارها المطلق هو

$$ق = م و$$

وحينئذ يمكن ان يقال أن قوة القصور الذاتي لنقطة مادية عبارة عن رد الفعل الواقع من هذه النقطة على الجملة المادية التي تجبرها على اتباع حركة معينة

وهذه القوة التي يظهر وجودها بالنسبة للحالة التي توجد فيها ارتباطات مادية يمكن اعتبار وجودها كذلك بالنسبة للنقط التي يؤثر بعضها على بعض ولو لم يشاهد ادنى واسطة بينها

وحيث ان قوة القصور الذاتي لنقطة مادية لا تؤثر على نفس النقطة المذكوره بل على الجملة المادية المرتبطة

المرتبطة بهذه النقطة التي تجبرها الآن تتبع حركة معينة فينتج من ذلك أنه متى اعتبرت النقطة المادية والقوة المؤثرة عليها فقط بدون نسبة القوة المذكورة الى الجملة الناشئة عنها تلك القوة فان قوة القصور الذاتي للنقطة المادية المذكورة تكون وهمية محضا كما سبق ذكر ذلك

ويمكن مشاهدة قوة القصور الذاتي وقياسها بالديناموميتر وهاك تجربة مهمة لهذه الغاية نذكرها فنقول

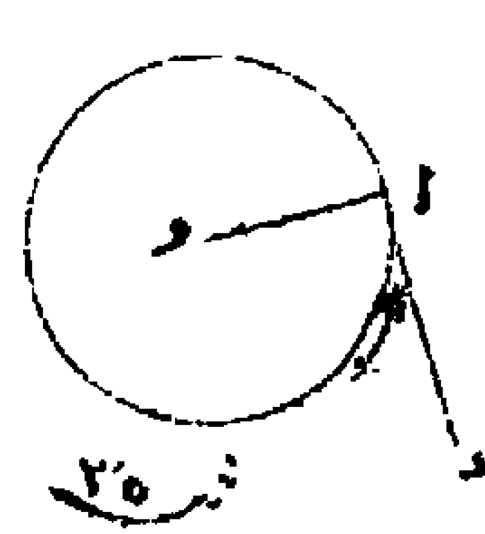
اذا علق جسم ده في ديناموميتر ء المسوك باليد شكل ٣٤ فيرى انه عند ما يكون الجسم ساكنا يبين الديناموميتر ثقله ولكن بمجرد رفع الآلة ينثني الزنبلك كثيرا كلما كان الصعود بسرعة وحينئذ يشاهد وجود قوة مضافة الى الجسم ناشئة من نفس الجسم المذكور الا انها واقعة على الفرع الأعلى للديناموميتر وهي مساوية بالضبط للقوة الجديدة التي تحدثها اليد عند رفع المجموعة (بقطع النظر عن ثقل الديناموميتر) ولكن اذا صارت الحركة منتظمة يرى ان شعبة الديناموميتر ترجع الى الوضع التي كانت فيه عندما كان الجسم ساكنا ولا يوجد حينئذ قوة قصور ذاتي في الحركة المنتظمة

واذا كانت حركة الصعود منتظمة العجلة فزيادة الانثناء تبقى ثابتة لانه حيث كانت القوة المحركة ثابتة فتكون قوة القصور الذاتي المساوية والمضادة لها ثابتة كذلك

ويفهم من التجربة السابقة ان التثاقل يؤثر على الجسم في حالة الحركة كما يؤثر عليه في حالة السكون فاذا حركت عربة مثلا موضوعة على طريق افقي أملس حركة عجلية بسحبها بواسطة حبل فانه يمكن التحقق اما برصد الحبل واما بالديناموميتر من ان شدة الحبل المذكور في هذه الحالة أكثر منها في الحركة المنتظمة وزيادة الشدة هذه يقدر بها قوة القصور الذاتي للعربة وتلك القوة ناشئة من العربة المذكورة ولكنها مؤثرة بواسطة الحبل السابق ذكره على المحرك الذي يجذب تلك العربة

في القوة الطاردة المركزية

الحركة الدائرية — القوة الجاذبة المركزية — اذا فرضت نقطة مادية ا متحركة باستظام على محيط دائرة مركزه و شكل ٣٥ يقال انه اذا كانت هذه النقطة ليست متأثرة الا بالسرعة الابتدائية فقط فانها تتحرك على خط مستقيم في اتجاه الجزء المستقيم ا اعني في اتجاه المماس اي بموجب ما تقدم ولكن حيث أن المتحرك يتحرك على محيط الدائرة المذكورة فحينئذ يكون متأثرا بقوة وحيث كانت الحركة منتظمة فيلزم ان تكون هذه القوة متجهة نحو المركز لأنه اذا فرض ان تلك القوة متجهة في اتجاه حيثما اتفق مثل ا ب شكل ٣٦ فيمكن تحليلها الى قوتين احداهما ا ه عمودية على اتجاه المتحرك ولا يمكن ان تغير سرعته والاخرى ا د على اتجاه المماس في نقطة ا وهذه


شكل ٣٥

القوة تغير سرعة المتحرك وعلى هذا فلا تكون الحركة منتظمة وحينئذ فالجسم الذى يسير بانتظام على محيط دائرة يكون متأثرا بقوة متجهة دائما نحو المركز

شكل ٣٦

وهذه القوة تسمى بالقوة الجاذبة المركزية نسبة لاتجاهها

القوة الطاردة المركزية — كما ان الفعل له رد فعل مساو ومضاد له كذلك القوة الجاذبة المركزية التى تجعل المتحرك يتحرك على محيط الدائرة بانتظام لها رد فعل فى جهة مضادة ومؤثر على الجملة الناشئ عنها القوة الجاذبة المركزية وليس هو الاحالة خصوصية من قوة القصور الذاتى

وعلى هذا فتكون القوة الطاردة المركزية عبارة عن رد الفعل الحادث من الجسم على الجملة المادية التى تجبره لأن يسير على محيط دائرة بحركة منتظمة

وحيث ان القوة الطاردة المركزية ناشئة عن القوة الجاذبة المركزية فتكون هاتان القوتان متلازمتان أعنى انه بمجرد انقطاع تأثير القوة الجاذبة المركزية ينقطع فى الحال تأثير القوة الطاردة المركزية ولكن يجب ملاحظة أن هاتين القوتين لا يقعان قط مباشرة على نفس النقطة المادية

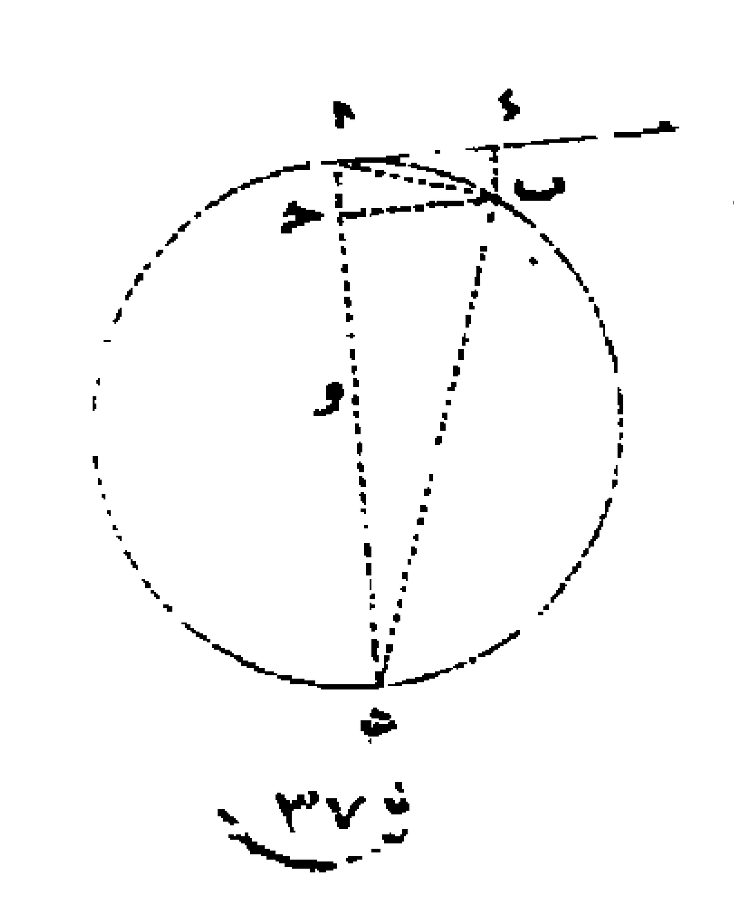
وربما يتوهم انه يفهم من لفظة طاردة مركزية أن القوة الطاردة المركزية تبعد المتحرك عن المركز فهذا خطأ محض حيث ان القوة المذكورة ليست واقعة على المتحرك مباشرة

ففى المقلاع مثلا الجذب الواقع من اليد على الحجر لأجل حفظه على محيط دائرة هو القوة الجاذبة المركزية وهى واقعة على الحجر المذكور بواسطة الحبل ولكن فى هذه الحالة تكون اليد مجذوبة فى آن واحد بالقوة الطاردة المركزية الناشئة عن ذلك الحجر وواقعة على اليد بواسطة الحبل وهاتان القوتان تحدثان أيضا للحبل شدا ويمكنها قطعه فحينئذ اذا انقطع الحبل بتأثير الشد المذكور أو صار قطعه فأن تأثير القوة الجاذبة المركزية ينعدم وتنعدم فى الحال القوة الطاردة المركزية ويبقى الحجر متأثرا بسرعته المكتسبة وينقذف حينئذ على اتجاه المماس لمحيط الدائرة الدائر عليه

تنبيه — اذا سار المتحرك على منحنى خلاف قوس الدائرة فالنتائج التى تحصل تكون مشابهة لما تقدم أعنى ان القوتين الجاذبة المركزية والطاردة المركزية تكونان دائما عموديتين على المنحنى المقطوع واذا كانت القوة التى تؤثر على المتحرك ليست متجهة فى اتجاه العمودى للمنحنى فتحلل كما تقدم الى قوتين احداها عمودية على المنحنى وهى القوة الجاذبة المركزية والأخرى مماسة وهى التى تغير سرعة المتحرك وتكون حينئذ حركته متغيرة وهذا حاصل فى الكواكب حيث انها تسير على قطاعات ناقصية بتأثير قوة تمر دائما بأحدى البورتين

تقدير القوة الطاردة المركزية — لأجل الحصول على مقدار القوة الطاردة المركزية نبحث عن مقدار القوة الجاذبة المركزية المساوية لها فنقول

اذا فرض ان المتحرك ا سائر بانتظام على محيط دائرة مركزه و شكل ٣٧ بسرعة قدرها ع وانه قطع القوس



القوس اب في مدة زمنية صغيرة جدا ز فانه يكون

$$\text{قوس اب} = \text{ع ز}$$

ولكن حيث أن المسافة اب يمكن اعتبارها محصلة مسافتين مركبتين متجهة احداهما اء على اتجاه المماس والأخرى اح على اتجاه نصف القطر فالمسافة اح تكون ناشئة عن القوة المركزية الجاذبة ولاجل معرفة مقدار المسافة المذكورة يقال انه من المثلث اب هـ القائم الزاوية يحدث

$$\text{اح} = \frac{\text{اب}^2}{2\,\text{نق}}$$

وفي هذه المعادلة نق رمز لنصف قطر محيط الدائرة المفروضة وحيث أن القوس اب صغير جدا فيمكن اعتبار طول القوس المذكور مساويا لوتره وحينئذ نضع في المعادلة المذكورة ع ز عوضا عن اب فتؤول الى

$$\text{اح} = \frac{\text{ع}^2\,\text{ز}^2}{2\,\text{نق}}$$

ويفهم من ذلك ان المسافة اح قطعت بحركة منتظمة العجلة مقدار عجلتها $\frac{\text{ع}^2}{\text{نق}}$ فاذا رمزنا لهذه العجلة بحرف و يكون

$$\text{و} = \frac{\text{ع}^2}{\text{نق}}$$

واذا رمزنا بحرف ق لشدة القوة الجاذبة المركزية وبحرف م لجسم المتحرك يكون

$$\text{ق} = \text{م و}$$ وحينئذ يكون

$$\text{ق} = \frac{\text{م ع}^2}{\text{نق}}$$

أعني ان شدة القوة الطاردة المركزية مناسبة طردا لجسم المتحرك ولمربع السرعة وعكسا لنصف القطر

تنبيهات

الأول ـ من القانون $\text{ق} = \frac{\text{م ع}^2}{\text{نق}}$ يتضح ان القوة الطاردة المركزية تنعدم اذا كان $\text{ع} = 0$ أو $\text{نق} = \infty$ أعني اذا كان الجسم ساكنا أو كان متحركا على خط مستقيم

الثاني ـ حيث انه يبين عادة مقدار القوة الطاردة المركزية بدلالة السرعة الزاوية للمتحرك فاذا رمزنا للسرعة الزاوية المذكورة بحرف ح يكون

$$\text{ح} = \frac{\text{ع}}{\text{نق}}$$ ومنه يحدث

$$\text{ع} = \text{ح نق}$$

فاذا وضع في القانون السابق عوضا عن ع مقدارها يحدث

$$\text{ق} = \text{م ح}^2\,\text{نق}$$

الثالث ـ حيث انه يمكن أيضا بيان مقدار القوة الطاردة المركزية بدلالة عدد الدورات التي يصنعها

المتحرك فى الثانية الواحدة فاذا رمزنا له بحرف ن يكون

ع = ٢ ط نو ن وعليه يكون

ق = ٤ ط٢ م نو ن٢

تطبيقات ــ ينتفع بالقوة الطاردة المركزية فى مراوح آلات الغربلة وفى الطلمبات الدورانية وخلافها ففى الآلات التى تسمى بالمجففات ينتفع أيضا بالقوة الطاردة المركزية لتجفيف الأجسام المبتلة وذلك بأن توضع تلك الأجسام فى اسطوانات جدرانها مثقوبة ثقوبا كثيرة جدا ثم تحرك تلك الاسطوانات حركة دورانية سريعة جدا بحيث تصل تلك الحركة الى ١٥٠٠ دوره فى الدقيقة الواحدة وحينئذ اذا فرض عنصر ما فى مثل م شكل ٣٨ موجود على السطح الداخل للاسطوانة فانه بسبب ان السطح المذكور يجبر ذلك العنصر على ان يتحرك حركة مستديرة فيحدث التأثير او القوة الجاذبة ق الواقعة على العنصر السالف ذكره وهذا العنصر يؤثر على ذلك السطح برد فعل مساو الى ق هو القوة الطاردة المركزية

فمتى وجد أحد العناصر أمام أحد الثقوب فى الوضع مَ فان كلتا القوتين تنعدم والعنصر المذكور المشترك فى السرعة ع مع الاسطوانة اثناء الدوران يتقذف الى الخارج على اتجاه المماس

ومثل ذلك يحصل بالنسبة للعناصر المائية الموجودة داخل الجسم المبتل حيث ان الثقوب فيه هى المسام وحينئذ فالماء يأتى منه بالتدريج الى الجدران ومنه ينقذف الى الخارج

وقد تستعمل فى فابريقات السكر آلات مشابهة للمجففات تسمى توربينات لأجل تخليص السكر الخام من العسل الاسود الملوث له

والسبب فى ميل العربات السائرة بسرعة على منحنيات انصاف اقطارها صغيرة الى الانقلاب هو تأثير مشابه لما تقدم ولذا فانه فى السكك الحديد لا يسمح على وجه العموم الا بالمنحنيات التى انصاف اقطارها تتجاوز ٢٠٠ متر وزيادة على ذلك فانه يصير تعلية القضيب الخارج عن الداخل بمقدار يكون كبيرا كلما كان نصف القطر صغيرا والسرعة كبيرة

ولا يخفى ان السبب فى حفظ الكواكب على مداراتها هو القوة الجاذبة المركزية وتعتبر انها ناشئة من جذب الشمس للكوكب وان القوة الطاردة المركزية المساوية لها ناشئة من الكوكب لكنها واقعة على الشمس وتعتبر الجذب الواقع من الكوكب على الشمس

وقد ينسب الى القوة الطاردة المركزية النقص الحاصل لثقل الأجسام على سطح الأرض بمجرد قربها من خط الاستوا وينسب اليها أيضا الانتفاخ الحاصل للكرة الارضية فى خط الاستواء

ويجب التمييز بكل اعتناء بين التأثيرات المنسوبة للقوة الطاردة المركزية وبين الحركات المنسوبة للقصور الذاتى

الذاق ففي المقاليع السابق ذكره مثلاً اشتداد الحبل ناشئ عن القوتين الطاردة المركزية والجاذبة المركزية لكن متى خرج الحجر فأن القوتين المذكورتين تنعدمان في آن واحد والحجر المذكور يقذف في الفراغ على اتجاه المماس بناء على سرعته المكتسبة اثناء الدوران

وبمثل ذلك فأن الوحل الملتصق في عجل العربات يقذف على اتجاه المماس ويسقط على الأرض بعد أن يرسم قطعاً مكافئاً بناء على ما تقدم

شغل القوى

في تعريف وتقدير الشغل

التأثير المفيد الناشئ من جهد عامل ما أعني شغله حسب المتعارف لا يقدر فقط بالجهد بل أيضاً بالطريق الذي حصل على طوله الجهد المذكور

فحينئذ الرجل الذي يرفع ثقلاً قدره خمسون كيلوجراماً لارتفاع متر واحد يحدث شغلاً ضعف الشغل الناتج من رفع خمسة وعشرين كيلوجراماً الى الارتفاع المذكور وبالمثل الصانع الذي يرفع خمسين كيلوجراماً الى ارتفاع مترين يحدث شغلاً ضعف شغل من يرفع خمسين كيلوجراماً الى ارتفاع متر واحد

ولكن اذا تغير كل من الثقل ده والارتفاع هـ بنسبة عكسية بحيث ان حاصل ضربهما يبقى ثابتاً فالشغال يصرف دائماً جهداً واحداً وحينئذ فالحاصل ده هـ يمكن ان يستعمل لتقدير شغله

وبهذه الطريقة قد توصل الى التعريف الرياضي لشغل القوى

شغل قوة ثابتة

شغل قوة ثابتة نقطة تأثيرها تحرك على اتجاه القوة - تعريف - شغل قوة ثابتة نقطة تأثيرها تحرك على اتجاه القوة هو حاصل ضرب شدة تلك القوة في طول المسافة المقطوعة

وقد يرمز عادة لشغل القوة ده بالرمز ش ده وحينئذ اذا رمز بحرف هـ للمسافة ا ا' شكل ٣٩ المقطوعة بنقطة تأثير القوة ده فبناء على التعريف المتقدم يكون

ا ا' ده — شكل ٣٩

$$ش ده = ده \times هـ$$

وحدتا الشغل - الكيلوجرام متر - الحصان البخاري - قد يقارن بشغل التثاقل شغل جميع القوى الأخر والوحدة المختارة هي الكيلوجرام متر وهو عبارة عن الشغل اللازم لرفع ثقل قدره كيلوجرام واحد الى ارتفاع متر واحد وهو لا يتعلق بالزمن حيث أن الشغل الناتج لا يتغير مهما كان الزمن المستعمل لذلك ولكن في الآلات نظراً لكونها تمتاز عن بعضها بالشغل الذي تحدثه في زمن معين فقد اتخذ لها وحدة أخرى مرتبطة بالزمن هي الحصان البخاري وهو عبارة عن الشغل الذي قدره ٧٥ كيلوجرام متر الحاصل في ثانية واحدة

وهذا الشغل اكثر من شغل الحصان المعتاد حيث أنه ظهر من التجربة اذ بتشغيل الحصان المعتاد ثمان

ساعات في اليوم الواحد يحدث شغلاً قدره ٤١ كيلوجرامتر في الثانية او ١١٨٠٨٠٠ كيلوجرامتر في اليوم ولكن شغل ٧٥ كيلوجرامتر في الثانية الواحدة ينشأ عنه مدة ٢٤ ساعة شغل قدره ٦٤٨٠٠٠٠ كيلوجرامتر وحينئذ الآلة التي قوتها حصان تجاوى واحد يمكنها ان تؤدي شغلاً اكثر من شغل خمسة خيول معتادة تتناوب مع بعضها في العمل بحيث ان كلا منها يشتغل ثمان ساعات كل اربعة وعشرين ساعة

الشغل المحرك ـ الشغل المقاوم ـ الشغل المحرك هو الشغل الناتج من قوة مؤثرة في جهة الحركة وهذه القوة يقال لها قوة محركة او قوة فقط والشغل المقاوم هو الشغل الناتج من قوة مؤثرة في جهة مضادة لحركة المتحرك وهذه القوة تسمى بالمقاومة فمثلاً اذا رفع جسم فالشغل الناتج هو شغل محرك والشغل الذي يحدثه التثاقل على الجسم المذكور هو شغل مقاوم

شغل قوة ثابتة نقطة تأثيرها تتحرك على خط مستقيم في اتجاه مغاير لاتجاه القوة المذكورة ـ تعريف ـ يسمى شغل قوة ثابتة نقطة تأثيرها تتحرك على خط مستقيم في اتجاه مغاير لاتجاه القوة المذكورة حاصل ضرب تلك القوة في المسافة المقطوعة في جيب تمام الزاوية الواقعة بين اتجاهي القوة والمسافة المقطوعة

فاذا فرض ان ١ق قوة ثابتة مقدارا واتجاها مؤثرة في نقطة ١ التي تتحرك على اتجاه ١و الصانع مع اتجاه القوة المذكورة ١ق زاوية قدرها ى شكل ٤٠ وفرض ان ١ب = هـ هي المسافة المقطوعة فبناء على التعريف المتقدم يكون

ش ق = ق هـ جتا ى ......(١)

تنبيهان

الأول ـ هذا القانون يمكن كتابته والنطق به بطريقتين مختلفتين وهما

الأولى ش ق = ق × هـ جتا ى ......(٢)

أعني ان الشغل يساوي حاصل ضرب المسافة في مسقط المسافة على اتجاه القوة

الثانية ش ق = هـ × ق جتا ى ......(٣)

أعني أن الشغل يساوي حاصل ضرب المسافة في مسقط القوة على اتجاه المسافة

الثاني ـ التعريف الثاني للشغل لم يكن الا تعميما للتعريف الأول ولبيان ذلك يقال أولا ان التعريف الثاني يحتوي على الأول لأنه اذا كانت ى = . يكون جتا ى = ١ ويؤل قانون (١) الى ش ق = ق هـ

ثانيا يمكن حصر التعريفين السابقين في منطوق واحد لأنه يكفي ان يعتبر في قانون (٢) أن مسقط المسافة على اتجاه القوة أعني هـ جتا ى عبارة عن المسافة مقدرة على اتجاه القوة وحينئذ فيكون شغل قوة ثابتة بالنسبة لانتقال مستقيم حيثما اتفق يساوي حاصل ضرب القوة في المسافة مقدرة على اتجاه القوة

ثالثا

ثالثاً يمكن استنتاج التعريف الثاني من الأول باعتبارات مستنتجة من فكرة تأثير القوى و ذلك لأن القوة المائلة ق يمكن تحليلها الى قوتين احداهما قَ شكل ٤١ عمودية على المسافة المقطوعة ا ب وتلك القوة لا تحدث اى تأثير على انتقال نقطة ا وحينئذ فلا ينشأ عنها شغل والأخرى قَ مجهة في اتجاه ا ب وهى التى ينسب لها الشغل المفروض فقط وحينئذ يكون

شكل ٤١

ش ق = ش قَ

وبناء على التعريف الأول يكون

ش ق = قَ × ا ب = ق جتا ى × ﻫ

وهو عين قانون (٢) السابق

مناقشة القانون ش ق = ق ﻫ جتا ى — اذا كان جتا ى موجبا فالشغل موجب أيضا ويكون هو الشغل المحرك واذا كان جتا ى سالبا فالشغل سالب أيضا ويكون هو الشغل المقاوم وحيث أن حاصل الضرب ق ﻫ جتا ى ينعدم اذا كان احد مضاريبه مساويا للصفر فلا يتأتى ذلك حينئذ الا فى ثلاث حالات

الأولى — متى كانت ق = ٠ أعنى انه اذا لم توجد قوة فلا يوجد شغل كالجسم المتحرك بسرعة المكتسبة مثل كرة تتدحرج على مستو أفقى بسرعة ثابتة

الثانية — متى كانت ﻫ = ٠ يعنى ان الجسم لم ينتقل من محله ككتلة من الماء محصورة فى حوض منفذه مغلق

الثالثة — متى كان جتا ى = ٠ أعنى متى كان ى = ٩٠° أى أن اتجاه القوة عمودى على اتجاه المسافة المقطوعة كالهواء الذى يؤثر بالتعامد على الطريق الذى تتبعه عربة من عربات السكة الحديد

شغل التثاقل على نقطة مادية — من بعد ملاحظة أن التثاقل ثابت متى كانت المسافة التى يقطعها الجسم الساقط صغيرة بالنسبة لنصف قطر الكرة الأرضية اذا فرضت نقطة مادية ثقيلة أعنى جسما آل الى مركز ثقله فأنه مهما كانت المسافة المقطوعة يكون شغل التثاقل مساويا لحاصل ضرب ثقل الجسم المذكور فى الانتقال الرأسى لمركز ثقله

لأنه اذا فرض جزء صغير جدا م ن من المنحنى ا ب شكل ٤٢ بحيث يمكن اعتباره خطا مستقيما فأن مقدار الشغل الحاصل عندما يقطع مركز ثقل الجسم المذكور الجزء الصغير م ن السابق ذكره بناء على ما تقدم يكون

شكل ٤٢

ث × مَ نَ

الذى فيه ث رمز لثقل الجسم ، مَ نَ مسقط المسافة م ن على اتجاه القوة ، التى هى رأسية

وبمثل ذلك يكون بالنسبة لجميع أجزاء المسافة المقطوعة وحينئذ بجمع الأشغال الجزئية المحصلة الى بعضها يحدث

ش ق = ق × ا ت

شغل قوة ثابتة الشدة مؤثرة بالتماس على محيط دائرة عجلة ـ اذا فرض أن قوس اب شكل ٤٣ صغير جدا بحيث يتحد مع المماس اد فان شغل القوة ق عند ما يقطع المتحرك المسافة الجزئية المذكورة يكون ق × اب حيث أن المسافة مقطوعة على اتجاه القوة ومثل ذلك يحدث بالنسبة لكل من الاشغال الجزئية. وحينئذ يكون الشغل الكلى لدورة كاملة مساويا لحاصل ضرب القوة ق فى مجموع الأجزاء المستقيمة أى فى طول محيط الدائرة و المقطوع أعنى أن

شكل ٤٣

ش ق = ق × ٢ ط نق

تنبيه ـ اذا كان المتحرك يقطع منحنيا حيثما اتفق بحيث أن القوة المؤثرة عليه تبقى مماسة له دائما ورمزنا لطول القوس المقطوع بالرمز ل يكون

ش ق = ق × ل

شغل قوة متغيرة

شغل جزئى ـ شغل كلى ـ اذا فرضت قوة متغيرة ق مؤثرة على نقطة مادية تتحرك على خط سير حيثما اتفق حء شكل ٤٤ وفرض ان او المسافة المقطوعة فانه يمكن اعتبار القوة المتغيرة ق ثابتة مقدارا واتجاها اثناء قطع نقطة تأثيرها الجزء الصغير اب المعتبر خطا مستقيما طوله هـ مساو لطول وتره وحينئذ اذا رمز بالرمز قَ لمسقط اد للقوة ق على اتجاه الوتر اب فأن مقدار الشغل الجزئى لهذه القوة بناء على ما تقدم يكون

قَ × هـ

شكل ٤٤

وبالمثل بالنسبة للأجزاء المتتالية تكون الأشغال الجزئية مبينة بالمقادير المشابهة للمقدار السابق ومجموعها يكون

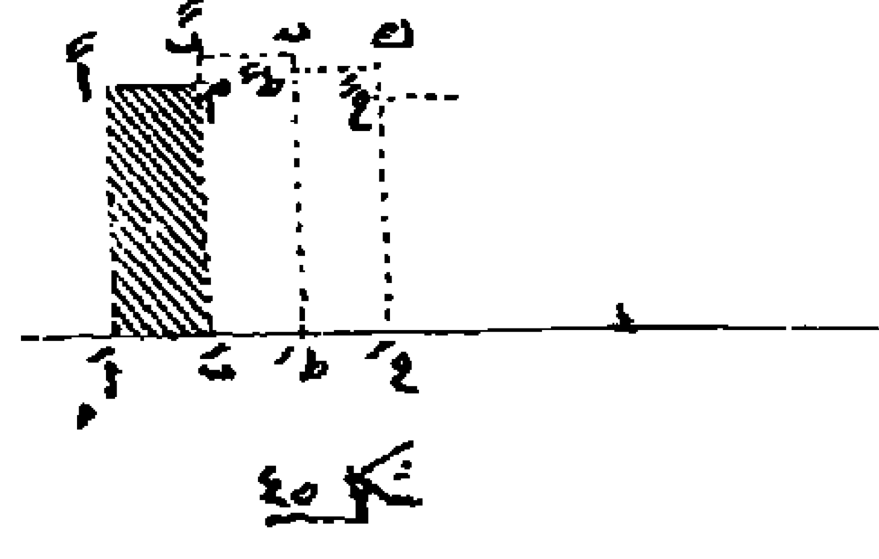
قَ هـ + قً هً + قٍ هٍ + ...

وحينئذ فالشغل الكلى للقوة يكون هو النهاية التى يميل اليها مجموع الاشغال الجزئية المذكورة حينما تميل المسافات الجزئية هـ ، هً ، هٍ ، .... نحو الصفر

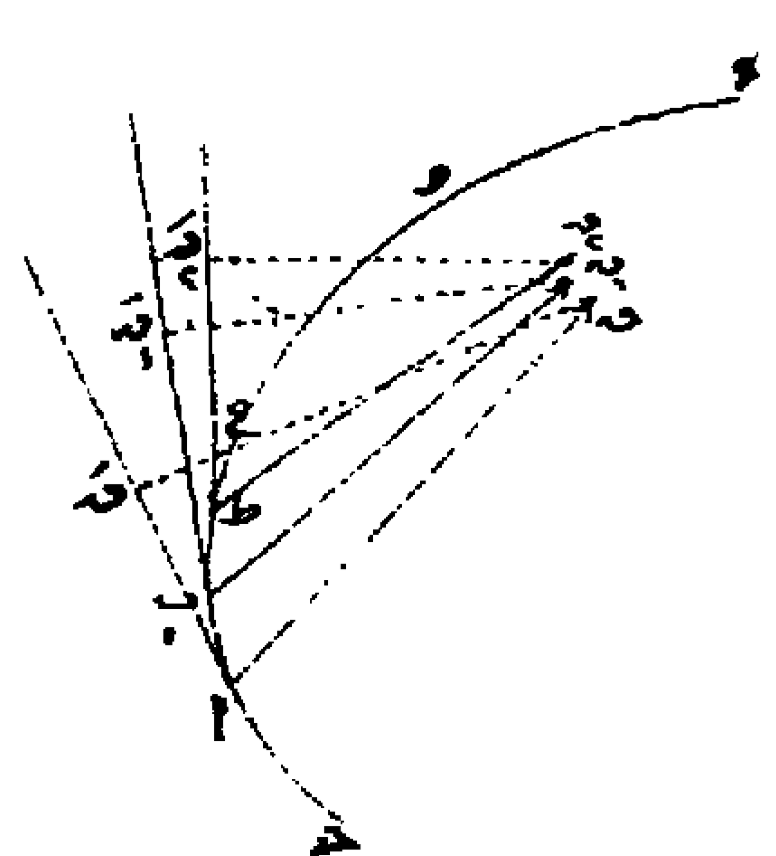
فاذا علمت الارتباطات الدالة على تغيرات القوة وشكل خط السير يمكن تعيين مقدار الشغل الكلى بكمية محدودة لكن حيث ان معلومية تلك الارتباطات ليست من حدود هذا العلم الابتدائى فيكفى بالطريقة الرسمية الآتية

الطريقة

الطريقة الرسمية لتقدير شغل قوة متغيرة ـ هذه الطريقة هى ان تقسم المسافة المقطوعة الى اجزاء صغيرة جدا بحيث يمكن اعتبار كل منها مستقيما فى الظاهر وأن القوة ثابتة عندما يقطع المحرك كل جزء من تلك الاجزاء المذكورة ثم تؤخذ بصفة احداثيات افقية الأطوال ا ت ، ت ط ، ط ع ، .... شكل ٤٥ المساوية الى المسافات الجزئية المستقيمة ا ب ، ب ط ، ط ع ، .... شكل ٤٦ المتكون منها خط السير المفروض وتؤخذ بصفة احداثيات رأسية على الأعمدة المقامة من نقط ا ، ت ، ط ، ع ، .... الأطوال ا اً ، ت تً ، ط طً ، .... المساوية الى المساقط ا هَ ، ب هَ ، ط هَ ، .... للقوة المفروضة على الاتجاهات المختلفة لتلك المسافات الجزئية فالشغل الجزئى ق هو المنسوب للانتقال ا ب يكون حينئذ مبينا بالمستطيل ا اً م ت وبمثل ذلك يكون بالنسبة لباقى الاشغال الجزئية المنسوبة لباقى الانتقالات الأخر وعليه فيكون مجموع الاشغال الجزئية عبارة عن مجموع المستطيلات



شكل ٤٥



شكل ٤٦

ا اً م ت + ت تً د ط + ط طً ن ع + ...

الذى يكتفى بتعيين مقداره اذا اريد الحصول على تقريب غير دقيق

ولا يخفى ان تقدير شغل القوة المتغيرة هذا يكون مقربا تقريبا كافيا كلما كانت الأجزاء ا ب ، ب ط ، ط ع ، .... صغيرة جدا فحينئذ اذا أخذ عدد تلك الأجزاء فى الازدياد بقدر ما يراد فالنقط اً ، تً ، طً ، عً ، .... تقرب من بعضها بقدر ما يراد وينشأ عن مجموعها منحنى بحيث يكون السطح المحصور بينه وبين الرأسيين المتطرفين ومحور السينات دالا على المقدار الحقيقى لشغل القوة المتغيرة بالضبط

ولأجل رسم المنحنى المذكور بضبط كاف يفرد بالدقة على قدر الامكان الجزء ا و من خط سير المحرك على محور السينات من ا الى و شكل ٤٧ وتوضع عليه النقط المتوسطة ت ، ط ، .... ويقام من جميع النقط ا ، ت ، ط ، .... الاحداثيات الرأسية للمنحنى المساوية للمساقط ا هَ ، ب هَ ، ط هَ ، .... للقوة المتغيرة على المماسات الممتدة من نقط ا ، ب ، ط ، .... لخط السير المفروض شكل ٤٦ وبهذه الطريقة تتعين النقط اً ، تً ، طً ، .... للمنحنى المطلوب ويكفى لرسمه بعد ذلك أن يوصل بين تلك النقط بخط متصل اً تً طً ....

شكل ٤٧

وحينئذ فيتعين بمساحة شبه المنحرف المنحنى ا اً وً و شكل ٤٧ مقدار شغل القوة المتغيرة المفروضة ويمكن الحصول على مقدار مساحة الشكل الذى من هذا القبيل اما بقانون بونسلى أو بقانون سمبسون أو بقانون الاشباه المنحرفة المستقيمة الأضلاع

ويتوصل احيانا لتعيين مقدار مساحة شكل ا اً وً و المذكور بقطعه من الورق ووزنه ثم وزن سطح

معلوم من الورق عينه وتعيين النسبة بين الوزنين المذكورين التي بواسطتها يمكن تعيين مساحة ذلك الشكل وهذه الطريقة سريعة جدا وانما تقتضي أن يكون الورق متجانسا جيدا

والتقريب الناتج من هذه الطريقة الرسمية يكون عظيما كلما كان انفراد خط السير مجهولا جيدا والنقط المتوسطة عديدة والمنحنى مرسوما بكل اعتناء

وبواسطة الآلة المسماة دليل المعلم وات يمكن رسم المنحنيات المشابهة للمنحنى الذي تكلمنا عليه مباشرة من نفسها وتلك المنحنيات تستعمل لتقدير شغل البخار في اسطوانات البخار وتسمى بالخطوط البيانية

الجهد المتوسط ـ الجهد المتوسط لقوة متغيرة هو شدة القوة الثابتة التي تحدث على الطريق عينه نفس الشغل الذي احدثته القوة المتغيرة المفروضة

فاذا رمزنا بالرمز ش ق لشغل القوة المتغيرة وبالرمز هـ للمسافة المقطوعة وبالرمز قَ للقوة المتوسطة فبناء على التعريف المتقدم يكون

قَ هـ = ش ق   ومنه يحدث

قَ = ش ق / هـ

شغل محصلة جملة قوى ـ نظرية ـ الشغل الجزئي لمحصلة جملة قوى يساوي المجموع الجبري للأشغال الجزئية للمركبات

لانه اذا كانت القوى هي ق، ق١، ق٢، .... ومحصلتها هي ح واسقطنا هذه القوى ومحصلتها على اتجاه الانتقال الجزئي أي على اتجاه جزء المسافة المقطوع ولاحظنا بناء على كثير أضلاع القوى ان مسقط المحصلة على محور ما يساوي المجموع الجبري لمساقط المركبات ورمزنا بالرموز حَ، قَ، قَ١، قَ٢، ..... لمساقط القوى ح، ق، ق١، ق٢، .... على اتجاه جزء المسافة المذكور يكون

حَ = قَ + قَ١ + قَ٢ + ...

وبضرب طرفي هذه المعادلة في جزء المسافة هـ يحدث

حَ هـ = قَ هـ + قَ١ هـ + قَ٢ هـ + ...   أعني ان

ش ح = ش ق + ش ق١ + ش ق٢ + ...   وهو المطلوب

نتيجة ـ الشغل الكلي للمحصلة يساوي المجموع الجبري للاشغال الكلية للمركبات

لانه يمكن ان نقسم الزمن المفروض الحاجة مسافات زمنية صغيرة صغرا كافيا بحيث في كل منها يمكن اعتبار الانتقالات مستقيمة والقوى ثابتة ثم نضع في كل من تلك الازمان الجزئية المذكورة شغل المحصلة يساوي المجموع الجبري لاشغال المركبات ونجمع للمتساويات الناتجة من ذلك فيحدث ان الشغل الكلي للمحصلة يساوي المجموع الجبري لجميع الاشغال الجزئية للقوى المذكورة أعني يساوي المجموع الجبري للاشغال الكلية للمركبات

في القدرة الحية

القدرة الحية لنقطة مادية هي حاصل ضرب نصف جسم تلك النقطة في مربع سرعتها اعني اذا رمزنا لجسم النقطة المادية بالرمز م ولسرعتها في نهاية الزمن ز بالرمز ع يكون ½ م ع² هو القدرة الحية للنقطة المادية المفروضة بالنسبة

بالنسبة للسرعة ع واما حاصل ضرب المجسم في مربع السرعة فيسمى بالقوة الحية ولاتدخل القوة الحية في بعض النظريات الا نادراً

في تقدير الشغل بواسطة القدرة الحية

للبرهنة على ان شغل القوى يمكن تقديره بواسطة القدرة الحية توجد ثلاث حالات

الحالة الأولى ـ اذا كانت قوة ثابتة ومؤثرة على نقطة مادية

نظرية القدرة الحية ـ شغل قوة ثابتة واقعة على نقطة مادية يساوى تغير القدرة الحية لأنه اذا فرض ان ق هي القوة الثابتة المؤثرة على نقطة مادية في اتجاه المسافة المقطوعة فانها تحدث لها حركة منتظمة العجلة بناء على ما تقدم وحينئذ اذا رمز بالرمز ع. للسرعة الابتدائية وبالرمز و للعجلة وبالرمز هـ للمسافة المقطوعة في مدة الزمن ن فبموجب ما تقدم يكون

$$\text{ش}_{\text{ق}} = \text{ق} \times \text{هـ} \qquad \text{وحيث ان}$$

$$\text{ق} = \text{م}\,\text{و} \quad ،$$

$$\text{هـ} = \text{ع}_{.}\,\text{ن} + \frac{\text{و}\,\text{ن}^{2}}{2} \qquad \text{فيكون}$$

$$\text{ش}_{\text{ق}} = \text{م}\,\text{ع}_{.}\,\text{و}\,\text{ن} + \text{م}\,\frac{\text{و}^{2}\,\text{ن}^{2}}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

وحيث أن

$$\text{ع} = \text{ع}_{.} + \text{و}\,\text{ن} \qquad \text{فيكون}$$

$$\text{و}\,\text{ن} = \text{ع} - \text{ع}_{.}$$

واذا وضع في معادلة (١) عوضا عن و ن مقداره يحدث

$$\text{ش}_{\text{ق}} = \text{م}\,\text{ع}_{.}\,(\text{ع} - \text{ع}_{.}) + \frac{\text{م}(\text{ع} - \text{ع}_{.})^{2}}{2} = \frac{\text{م}\,\text{ع}^{2} - \text{م}\,\text{ع}_{.}^{2}}{2} \qquad \text{أو}$$

$$\text{ش}_{\text{ق}} = \frac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ع}^{2} - \frac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ع}_{.}^{2}$$

أعنى أن شغل القوة المذكورة يساوى القدرة الحية النهائية مطروحا منها القدرة الحية الأبتدائية واذا لم تكن القوة المفروضة متجهة في اتجاه المسافة المقطوعة فتحصل النتيجة عينها حيث انه يمكن تحليل تلك القوة الى قوتين احداهما عمودية على المسافة المقطوعة ولاتحدث للنقطة المادية المذكورة ادنى شغل بموجب ما تقدم والأخرى في اتجاه تلك المسافة المقطوعة ويكون شغلها عين شغل القوة المفروضة كما تقدم أيضا

الحالة الثانية ـ اذا كانت جملة قوى حيثما اتفق مؤثرة على نقطة مادية

نظرية ـ الشغل المتحصل من جملة قوى واقعة على نقطة مادية يساوى تغير القدرة الحية

لأنه حيث كان شغل المحصلة يساوى المجموع الجبري لشغل المركبات بموجب ما تقدم فيكفى أن لا نعتبر سوى شغل تلك المحصلة وحينئذ اذا فرض ان خط السير منقسم الى جملة اجزاء صغيرة صغرا كافيا بحيث يمكن اعتبار كل منها مستقيما وان في مدة قطع كل منها تعتبر المحصلة المذكورة ثابتة الشدة والاتجاه وفرضنا ان م هو مجسم المتحرك وان ع. هي سرعته الابتدائية ورمزنا بالرموز ع_{1} ، ع_{2} ، ع_{3} ، ..... $\text{ع}_{\text{ن}}$ لسرع المتحرك المذكور في نهاية كل من الجزء الأول والثانى والثالث ، .... والأخير يكون الشغل المتحصل حينما تقطع النقطة

المادية المذكورة الجزء الأول مساويا الى

$\frac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ع}_{1}^{2} - \frac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ع}_{0}^{2}$ وحينما تقطع الجزء الثانى مساويا الى

$\frac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ع}_{2}^{2} - \frac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ع}_{1}^{2}$ وحينما تقطع الجزء الثالث مساويا الى

$\frac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ع}_{3}^{2} - \frac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ع}_{2}^{2}$ . . . .

. . . . . . وحينما تقطع الجزء الأخير مساويا الى

$\frac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ع}_{\text{ن}}^{2} - \frac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ع}_{\text{ن}-1}^{2}$

وبجمع هذه الاشغال الجزئية الى بعضها والاختصار يحدث

$$\text{الشغل الكلى} = \frac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ع}_{\text{ن}}^{2} - \frac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ع}_{0}^{2}$$

أعنى ان الشغل الكلى للمحصلة يساوى القدرة الحية النهائية مطروحا منها القدرة الحية الابتدائية

الحالة الثالثة وهى الحالة العمومية ـ اذا كان جملة قوى حيثما اتفق واقعة على جملة نقط مادية مرتبطة مع بعضها

اذا اعتبرت فى هذه الحالة جملة حيثما اتفق من النقط المادية متحركة بتأثير عدد حيثما اتفق من القوى فانه بمراعاة جميع القوى الداخلة والخارجة الواقعة على كل من تلك النقط يمكن اعتبار كل منها مطلقا

والقوى الداخلة هى القوى التى تعوض الارتباطات التى تجبر نقط الجملة المادية على التحرك بشروط معينة كبقائها مثلا على ابعاد ثابتة من بعضها أو تحركها على خطوط أو سطوح ثابتة وهكذا

نظرية ـ المجموع الجبرى لاشغال جميع القوى الواقعة على جملة حيثما اتفق من النقط المادية يساوى المجموع الجبرى لتغيرات القدر الحية لنقط الجملة المذكورة

لأنه بالنسبة لكل نقطة من نقط الجملة المادية يكون شغل محصلة جميع القوى الواقعة على تلك النقطة مساويا الى

$$\frac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ع}^{2} - \frac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ع}_{0}^{2}$$

ولاجل الحصول على مقدار الشغل الكلى يلزم ايجاد حاصل جمع الاشغال الجزئية لكن حيث ان هذا الحاصل يتركب من جملة حدود مشابه كل منها الى $\frac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ع}^{2}$ التى يمكن بيان مجموعها بالمقدار $\text{مج}\,\frac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ع}^{2}$ ومن جملة حدود أخر مشابه كل منها الى $\frac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ع}_{0}^{2}$ التى يمكن بيان مجموعها بالمقدار $\text{مج}\,\frac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ع}_{0}^{2}$ فحينئذ اذا رمز لمجموع اشغال جميع القوى الواقعة على الجملة المادية بالرمز ش ق يكون

$$\text{ش ق} = \frac{1}{2}\,\text{مج}\,\text{م}\,\text{ع}^{2} - \frac{1}{2}\,\text{مج}\,\text{م}\,\text{ع}_{0}^{2}$$

وهو المطلوب اثباته

تنبيه ـ من المهم جدا معرفة انه بواسطة معادلة القدرة يمكن الحصول على شغل اى قوة بدون معرفة شدتها واتجاهها وزمن تأثيرها على المتحرك وانما يكفى فقط معرفة جسم ذلك المتحرك ومقدار تغير سرعته الناشئ عن تلك القوة

وسنذكر

وسنذكر فيما بعد جملة تطبيقات مهمة جدا على قاعدة القدر الحية لأجل فهم مزية استعمالها

تمرينات

(١) النسبة بين عزم القوة والشغل الجزئي لها ـ المطلوب البرهنة على ان النسبة بين الشغل الجزئي لقوة ثابتة واقعة على نقطة مادية وبين عزمها بالنسبة لنقطة ما كالنسبة بين جزء المسافة وبين بعد ذلك الجزء عن مركز العزم

(٢) الكبش المستعمل في آلة دق الخوازيق ـ المطلوب تعيين مقاومة الأرض من بعد معلومية ثقل الكبش ك وارتفاع سقوطه ه ومقدار الكمية الصغيرة التي يقطعها الخازوق ٢ في النزول من تأثير سقوط الكبش المذكور على قمته شكل ٤٨

(٣) عدة تدور بالخيل ـ اذا ربطت في عدة دوارة اربعة خيول بحيث ان كلا منها ش ٤٨ يحدث شدا قدره ٣٠ كيلوجرام وان نصف قطر المدار يساوى ٣ متر وان الخيول تدور خمسة دورات في كل ٣ دقائق فما يكون مقدار شغل الخيول المذكورة في مدة ٨ ساعات وما يكون مقدار قوة الآلة التي تحدث نفس الشغل المقدم بالخيول البخارية

(٤) الشغل الناتج من سقوط المياه ـ اذا كان نجرى ماء تصرفه ٥٠ متر مكعب في كل ٢٤ ساعة وللانتفاع به جعل فيه سد ارتفاعه ٤ متر فما يكون مقدار الشغل الناتج من سقوط المياه من فوق رأس السد المذكور بالخيول البخارية

(٥) شغل البخار ـ اذا كانت آلة بخارية غير انتشارية ومساحة قطاع مكبسها س وطول الرجة فيها ل وضغط البخار فيها ض فما يكون مقدار شغل الآلة المذكورة في كل ضعف رجه وما يكون شغل تلك الآلة أيضا بالخيول البخارية اذا كان عدد ضعف رجات المكبس في الدقيقة الواحده هو ن

(٦) الشغل الناتج من انتشار غاز ما ـ اذا كان غاز ضغطه ن جوات داخل في أسطوانة الى أن يقطع المكبس مسافة قدرها $\frac{1}{4}$ من مجراه ثم غلق بعد ذلك منفذ دخول الغاز المذكور وصار المكبس متحركا بقوة انتشار ذلك الغاز فما يكون مقدار الشغل المتحصل من الانتشار بفرض عدم تغير درجة الحرارة وما يكون مقدار تأثير الضغط المقاوم

(٧) ما مقدار السمك اللازم اعطاؤه للوح من الخشب حتى لا يثقب بتأثير مقذوف ثقله ه وسرعته ع من بعد ملاحظة ان المقاومة المتوسطة للخشب هى ى

(٨) ما مقدار الشغل المتحصل من بارود داخل ماسورة بندقية من بعد معلومية ان الرصاصة التي ثقلها ه تخرج من البندقية المذكورة بسرعة قدرها ٤ امتار في الثانية

انتقال الشغل في الآلات

تطبيق قاعدة القدر الحية على الآلات

الآلة هي جسم أو عدة اجسام مرتبطة ببعضها مع بعض معدة لنقل شغل القوى والقوى التي تؤثر على آلة ما بعضها يحرك تلك الآلة ويسمى بالقوى المحركة وشغلها يسمى بالشغل المحرك والبعض الآخر يميل لابطاء أو ايقاف حركة الآلة المذكورة ويسمى بالقوى المقاومة وشغلها يسمى بالشغل المقاوم

الشغل المفيد – شغل المقاومات التأثوية – المقاومات الواقعة على الآلة تنقسم الى مقاومات مفيدة أو أصلية وهي عبارة عن التأثير الذي تحدثه الآلة وشغلها يسمى بالشغل المفيد والى مقاومات ثانوية وهي مثل الاحتكاكات ومقاومات الاواسط والتصادمات والارتجاجات الحاصلة في بعض القطع وهكذا وتلك المقاومات تبتلع بصفة فقد محض جزأ من الشغل وشغلها يسمى بشغل المقاومات الثانوية أو الشغل الهادم

مثلا عند رفع دلو ماء بواسطة ملفاف فأن القوة التي تؤثر على المنويلة تحدث الشغل المحرك وثقل الماء المرفوع مضروبا في الارتفاع اللازم رفعه اليه هو الشغل المفيد أما ثقل الدلو والحبل والمقاومة الناشئة من الماء والهواء على حركة الدلو والماء المصبوب اثناء الصعود ويبوسة الحبل أى المقاومة اللازم ان يتغلب عليها لأجل ثني الحبل المذكور على الملفاف واحتكاك الصباعين فأن جميع تلك المقاومات تحدث شغلا يسمى بشغل المقاومات الثانوية

حركة أى آلة – كل آلة يمكن اعتبارها كجملة نقط مادية مرتبطة مع بعضها ومتحركة بحركات مخصوصة وعلى ذلك فيمكن تطبيق قاعدة القدر الحية عليها وحينئذ يكون شغل القوى الواقعة على أى آلة مقدرا بتغير القدر الحية

وحيث أن القوى المحركة تؤثر في الجهة المضادة لجهة القوى المقاومة فتكون اشارة شغل القوى المحركة مغايرة لاشارة شغل القوى المقاومة وحينئذ اذا رمز للشغل المحرك بالرمز $ش_م$ وللشغل المقاوم بالرمز $ش_ق$ يكون

$$ش_م - ش_ق = \frac{١}{٢} م ع^٢ - \frac{١}{٢} م ع_٠^٢$$

وهذه المعادلة المهمة تسمى بمعادلة الشغل

مناقشة – يلزم اعتبار ثلاث حالات

الأولى ان تكون $ع > ع_٠$ وحينئذ يحدث $ش_م > ش_ق$

وهذا يحصل في المدة التي فيها تأخذ الآلة في السير وفي تلك المدة تتزايد السرعة حتى تصل سرعة حالة الانتظام

الثانية – أن تكون $ع = ع_٠$ وحينئذ يحدث

$$ش_م = ش_ق$$

وفي هذه

وفي هذه الحالة تكون الحركة منتظمة وهذا ما يعبر عنه بالسير العمومي الذي تكون فيه سرعة الآلة هي سرعة حالة الانتظام

ويفهم من ذلك أنه لاجل ان يكون سير الآلة منتظما يلزم ان تحدث القوى المؤثرة على تلك الآلة شغلا محركا مساويا للشغل المقاوم

الثالثة – ان تكون ع < ع وحينئذ يحدث

ش < ش

وفي هذه الحالة سرعة الآلة تتناقص وهي المدة التي فيها تأخذ الآلة في الوقوف والشغل المحرك يكون أصغر من الشغل المقاوم ويتناقص الى ان تقف الآلة

التساوي بين الشغل المحرك والشغل المقاوم – في أثناء مدة السير أعني اثناء المدة التي تمضي بين مبدأ سير الآلة وبين وقوفها يكون الشغل المحرك مساويا طبعا للشغل المقاوم

لأنه في معادلة ش – ش = ½ م عَ – ½ م ع يكون

عَ = ٠ حيث ان الآلة تسير من السكون

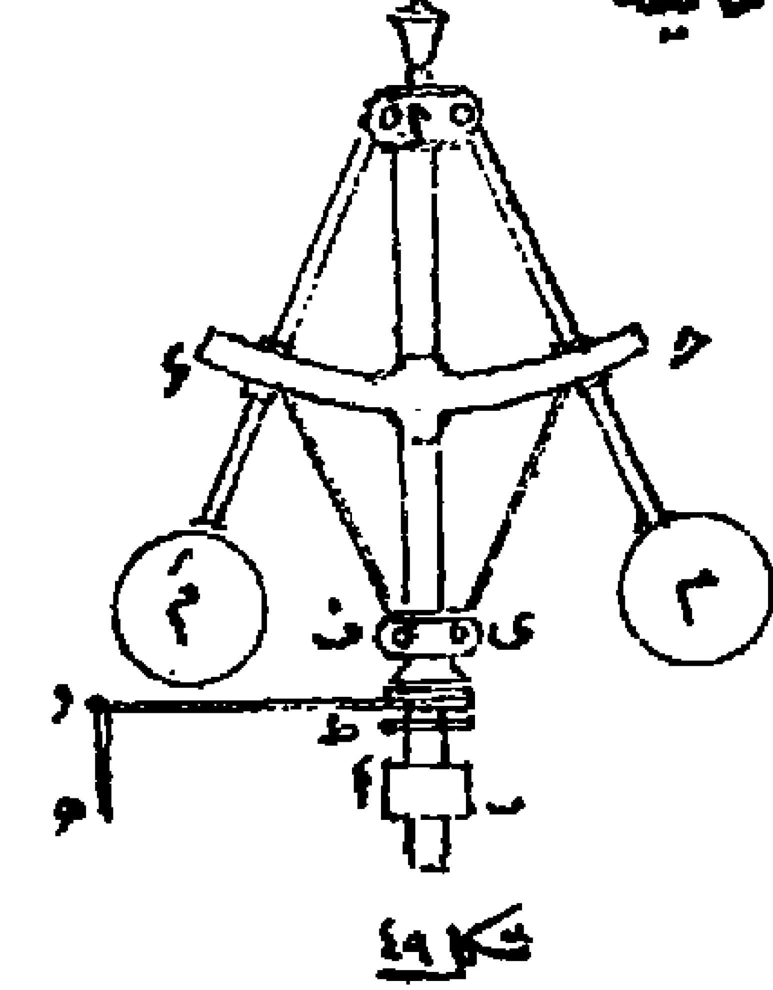
ع = ٠ حيث ان الآلة ترجع الى السكون

فحينئذ يكون ش – ش = ٠ ومنها يحدث

ش = ش

سرعة حالة الانتظام – قد ذكرنا فيما تقدم ان الآلة يكون لها سرعة حالة الانتظام متى كانت حركتها منتظمة وحيث ان الحصول على هذه الحالة بالضبط غير ممكن غالبا بسبب أن المقاومات اللازمة ان يتغلب عليها متغيرة جدا فيبحث عن الوصول للقرب من تلك الحالة بقدر الامكان وحيث ان كل تغير دفعي للسرعة ينشأ عنه انصدام وعليه يحصل فقد من الشغل فلاجل منع تغيرات السرعة تستعمل المنظمات والطيارات التي سنذكرها فنقول

المنظم ذو القوة الطاردة المركزية – المنظمات هي أجهزة تعدل شدة القوة المحركة عادة بتنظيم دخول البخار في اسطوانة البخار مثلا أو بتنظيم دخول كمية الماء التي تدور طارة مائية



شكل ٤٩

والمنظم الكثير الاستعمال هو المنظم ذو القوة الطاردة المركزية أو المنظم ذو الكرتين الذي عدله المعلم وات لاستعماله في الآلات البخارية وهو يتركب كما في شكل ٤٩ من ساق رأسي ا ا الذي يتحرك حركة دورانية بانضمامه لمحور حركة الآلة ومن ساقين مائلين ا م ا ، ا م َ مرتبطين ارتباطا مفصليا في ا ومنتهيين بجسمين ثقيلين م ا م َ مشتركين مع الساق الرأسي السابق ذكره في الحركة الدورانية المذكورة ثم انه مرتبط في ح ، ء ساقان لحزان ح ء ا ، ء ف ارتباطا مفصليا

وهذان الساقان مرتبطان بجلبة ى ف التى تتحرك على طول الساق ٢١ وهذه الجلبة تحرك احد ذراعى رافعة ذات مرتفق ط وهو وذراعها الآخر يفتح أو يغلق منفذ قبول البخار أو يؤثر على اعضاء الانتشار فاذا ازدادت الحركة فأن الكرتين تتباعدان وعليه فالجلبة ترتفع والرافعة ذات المرفق تغلق منفذ القبول واذا نقصت سرعة الآلة فالمنظم يحدث تأثيرا مغايرا للأول

وعيب المنظمات هو تأخير تأثيرها وذلك لأنه يلزم أن تكون الحركة متزايدة قبل ان يؤثر المنظم من أجل أبطائها وحينئذ فلا يكون للمنظمات فائدة الا اذا كان تأثير الاسباب الموجبة لأزدياد الحركة أو لابطائها له مكث

وتمنع التغيرات الدفعية للسرعة بواسطة الطيارات

الطيارات — الطيارات هى طارات ذات قطر كبير ومجسم عظيم موزع بانتظام على الخصوص نحو المحيط فحق ابتدأت الآلة فى الحركة فأن الطيارة تبطئ ازدياد السرعة بابتلاع كمية عظيمة من الشغل الى ان تصل سرعة الآلة الى سرعة حالة الانتظام واذا ازدادت المقاومات بعد ذلك فأن الطيارة تترك جزأ من القدرة الحية المشتملة هى عليها وبسبب عظم مجسمها فأن سرعة الآلة تنقص بكيفية غير محسوسة

ويمكن اعتبار الطيارة كمستودع يبتلع الشغل الزائد ويمنع الآلة من الهيجان ثم يترك عندما يضعف المحرك أو تتزايد المقاومات ويمنع حصول بطئ دفعى

ثم ان وجود الطيارة فى الآلات التى لها ذراع ومنويله ضرورى لأجل التغلب على النقط الميتة وأما الالات اللوكوموتيف فلا تستعمل فيها الطيارات بسبب عظم مجسماتها وزيادة على ذلك فأن تلك الآلات لها جملة اذرعة لتنظيم تأثير القوة المحركة

ومتى علمت التغيرات التى يمكن ان تحدثها المقاومة فأنه يمكن تعيين مقادير ابعاد الطيارة بحيث ان تغيرات السرعة لا تتجاوز حدا معينا كمقدار $\frac{1}{40}$ مثلا من سرعة حالة الانتظام

وعيب الطيارة هو تكبير شغل المقاومات الثانوية بمقدار عظيم بسبب الاحتكاك الحاصل من اصبعيها على مسنديها

الشغل المفيد — جودة الآلة — قد علم مما تقدم ان الشغل المقاوم يتركب من الشغل المفيد ومن شغل المقاومات الثانوية وحينئذ يكون

$$ش_م = ش_ف + ش_ث$$

وحيث ان $ش_م = ش_م$ بموجب ما تقدم فيكون

$$ش_م = ش_ف + ش_ث$$

ويفهم من ذلك ان الآلة تكون جيدة كلما كان شغل المقاومات الثانوية ضعيفا حيث انه فى هذه الحالة يكون الشغل المفيد جزأ عظيما من الشغل المحرك

فالنسبة بين الشغل المفيد والشغل المحرك هى ما تسمى بجودة الآلة أو بمعامل التأثير المفيد وعلى هذا فتكون الجودة

الجودة المذكورة مبينة بالمقدار $\frac{ش}{ش}$

وحيث أنه من المستحيل اعدام شغل المقاومات الثانوية فتكون الجودة دائما أصغر من الواحد ولا تتجاوز ٠٫٧٥ في الآلات الجيدة الا نادرا

وحينئذ يكون من المهم جدا تقليل المقاومات الثانوية ما أمكن ولذلك يلزم تقليل القطع المتحركة وتلطيف الاحتكاكات بصقل القطع المتماسة وحفظ الدهانات على حالة جيدة وضبط القطع كي تصير الأخلية قليلة ويحصل تقليل الارتجاجات ما أمكن وهكذا ومع ذلك فجميع هذه الاحتراسات لا يمكنها سوى تقليل المقاومات الثانوية وليس محوها بالكلية وعليه فتقل الشغل المقاوم فقط ولا تعدمه

ويعلم من ذلك أنه يستحيل حينئذ التوصل الى شغل مساو للشغل المحرك حيث أنه بأي آلة كانت لا يتحصل الا على جزء من الشغل المحرك

من البحث المحث عن الحركة الدائمية — الحركة الدائمية موجودة من ابتداء خلقة العالم فان حركات الكواكب والبحار والانهار وهكذا مستمرة الوجود الى الآن ويمكن الانتفاع بأحدها بواسطة الآلات التي تحرك مادامت قابلة للاستعمال

وأما البحث عن الحركة الدائمية التي نحن بصددها فهو أمر مخالف لذلك اذ الغرض منه ايجاد آلة تتحرك تحركا لا نهاية له وتؤدي الى عمل مفيد وذلك بواسطة تأثير محرك عليها مدة قليلة من الزمن فقط

فهذا الامر عبث محض لأنه ولو فرض عدم الحصول على أدنى عمل مفيد فأنه من المستحيل أن التأثير المحدود الناشئ عن محرك أن يؤدي للآلة حركة تستمر بلا نهاية

وللبرهنة على ذلك يقال أنه بالنسبة لأي آلة بناء على ما تقدم يكون

$$\frac{ش}{م} = \frac{ش}{ه} \quad \text{أو}$$

$$ق \times هـ = ك \times د$$

وحيث ان في هذه الحالة مقدار الطرف الأول من المعادلة المذكورة محدود بسبب ان مقدار كل من القوة المحركة ق والمسافة هـ التي تقطعها محدود وصغير نوعا على العموم فلا يمكن ان يكون الطرف الثاني غير محدود وحيث انه مهما كان صغر مقدار المقاومة ك لا يمكن ان تكون معدومة فالعامل الثاني د يكون له طبعا مقدار محدود وبالأولى يكون محدودا اذا كانت الآلة ملزومة لأن تؤدي عملا مفيدا وهو المطلوب

تحقيق قاعدة انتقال الشغل

قد ذكرنا فيما تقدم أن الآلة تنقل الشغل المحرك وفي مدة من السير يكون الشغل المحرك مساويا للشغل المقاوم فهذا ما يعبر عنه بقاعدة انتقال الشغل

وقد تحقق بالسهولة هذه القاعدة في الآلات البسيطة المتحركة بانتظام بتأثير قوتين

وذلك لأنه حيث كانت الحركة منتظمة فالقوة ق والمقاومة ك تتزنان معا اذ بخلاف ذلك يكون لهما محصلة مؤثرة على الآلة بالاستمرار وتحدث لها حركة متغيرة وهذا مخالف للغرض فحينئذ تسير الآلة

بناء على خاصية القصور الذاتى أعنى يكون الشغل المحرك يساوى الشغل المقاوم

وتحقق التساوى بين الشغل المحرك والشغل المقاوم فى الحالة الخصوصية التى نحن بصددها باتخاذ الرافعة مثلا وباتباع سير مشابه لذلك يجرى التحقيق عينه بالنسبة للآلات البسيطة الأخرى المتحركة بانتظام الذى سيطلب فيما بعد بصفة تمرين

تحقيق قاعدة الشغل فى الرافعة — اذا كان ا و ب شكل ٥ رافعة متأثرة بقوتى ق ، ك فنفرض أن القوتين المذكورتين مؤثرتان فى النهايتين ى ، ح لذراعى رافعتها

وحيث ان القوتين المذكورتين عموديتان دائما على ذراعى رافعتها بسبب حصول التوازن فى اثناء الحركة فاذا ومرجر فى م ا ن للقوسين المرسومين بالنقطتين ى ، ح يكون شغل القوة ق مساويا الى ق م بموجب ما تقدم وشغل القوة ك مساويا الى ك ن

وحيث ان القوتين ق ، ك متزنتان فبموجب ما تقدم يكون $\frac{\text{ق}}{\text{ك}} = \frac{\text{وح}}{\text{وى}}$

وكذا حيث ان القوسين م ، ن متشابهان فيكونان مناسبين لنصفى قطريهما ويحدث

$$\frac{\text{ن}}{\text{م}} = \frac{\text{وح}}{\text{وى}}$$ وحينئذ يكون

$$\frac{\text{ق}}{\text{ك}} = \frac{\text{ن}}{\text{م}}$$ ومنها يحدث

$$\text{ق م} = \text{ك ن}$$

أعنى ان الشغل المحرك يساوى الشغل المقاوم وهو المطلوب

ما يكتسب من القوة يفقد من السرعة — هذه القاعدة التى يلزم مراعاتها ناتجة من قاعدة انتقال الشغل وذلك لأن كل شغل محرك يقابل لشغل مقاوم مساو له ولكن الشغل المقاوم المذكور هو حاصل ضرب عاملين بحيث اذا كبر احدهما صغر الآخر فحينئذ اذا كبرت القوة التى يلزم ان يتغلب عليها صغرت المسافة التى تقطعها وبالعكس اذا أريد تكبير المسافة فالقوة التى يلزم ان يتغلب عليها تصير صغيرة وعلى هذا فيرى ان ما يكتسب من القوة يفقد من المسافة المقطوعة

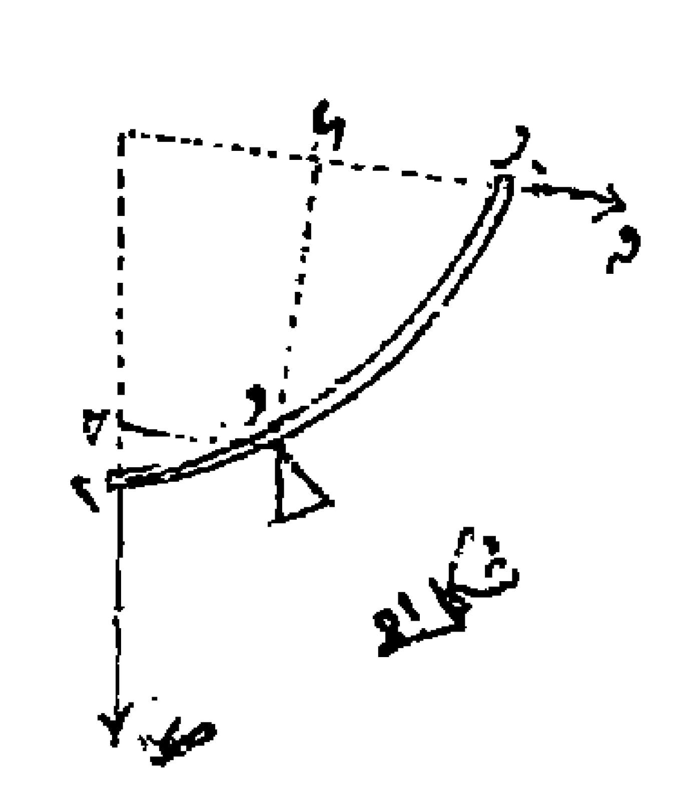
ومع ذلك فينطق بالقاعدة المذكورة عادة هكذا

ما يكتسب من القوة يفقد من السرعة

شروط توازن الآلات البسيطة المحصلة تلك الشروط بواسطة معادلة الشغل

التساوى بين الشغل المحرك والشغل المقاوم فى الآلات المتحركة بانتظام يوصل بطريقة بسيطة جدا لشروط توازن القوى الواقعة على تلك الآلات

توازن الرافعة — حيث ان الرافعة ا و ب شكل ٥ متحركة بانتظام بتأثير القوتين ق ، ك فتكون هاتان


شكل ٤١

هاتان القوتان متزنتين بموجب ما تقدم واذا فرض أنهما واقعتان في نقطتي د ، هـ اللتين هما نهايتا ذراعي رافعتها فتكون هاتان القوتان عموديتين دائما على و د ، و هـ ما دام التوازن حاصلا وحينئذ اذا رمز بالرمزين م ، ف للمسافتين المقطوعتين بالنقطتين د ، هـ فأن معادلة الشغل تكون هي

ق م = ك ف ومنها يحدث

ق / ك = ف / م ولكن بناء على ما تقدم يكون

ف / م = و هـ / و د وحينئذ يحدث

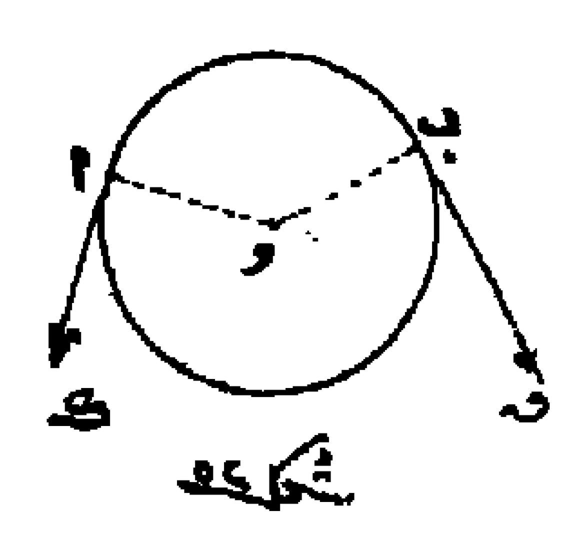
ق / ك = و هـ / و د

اعني ان القوة والمقاومة متناسبتان عكسا لذراعي رافعتها وهذا هو الشرط الذي وجد سابقا في علم الاستاتيك

توازن البكرة الثابتة — حيث ان المسافتين المقطوعتين بالنقطتين ا ، ب شكل ٤٠ متساويتان بالبداهة فمعادلة الشغل تكون

ق م = ك م وحينئذ يكون

ق = ك


شكل ٤٠

وهذا هو شرط توازن البكرة الثابتة السابق ايجاده

توازن البكرة المتحركة — الحالة البسيطة المستعملة كثيرا في العمل هي التي فيها يكون الحبلان متوازيين وهي التي سنشتغل بها هنا فنقول

اذا فرض ان و وَ شكل ٤٢ هو الارتفاع الذي ارتفعت اليه البكرة أو الحمل ك فأن كلا من الحبلين ينقص بمقدار و وَ وحينئذ فالقوة ق يلزم أن تتحرك بمقدار ٢ × و وَ وعلى هذا ففي معادلة الشغل التي هي

ق م = ك ف يكون

م = ٢ ف وحينئذ يحدث

ق × ٢ ف = ك ف ومنها يحدث

ق / ك = ١ / ٢

شكل ٤٢

وهذا هو عين الشرط السابق ايجاده في الاستاتيك

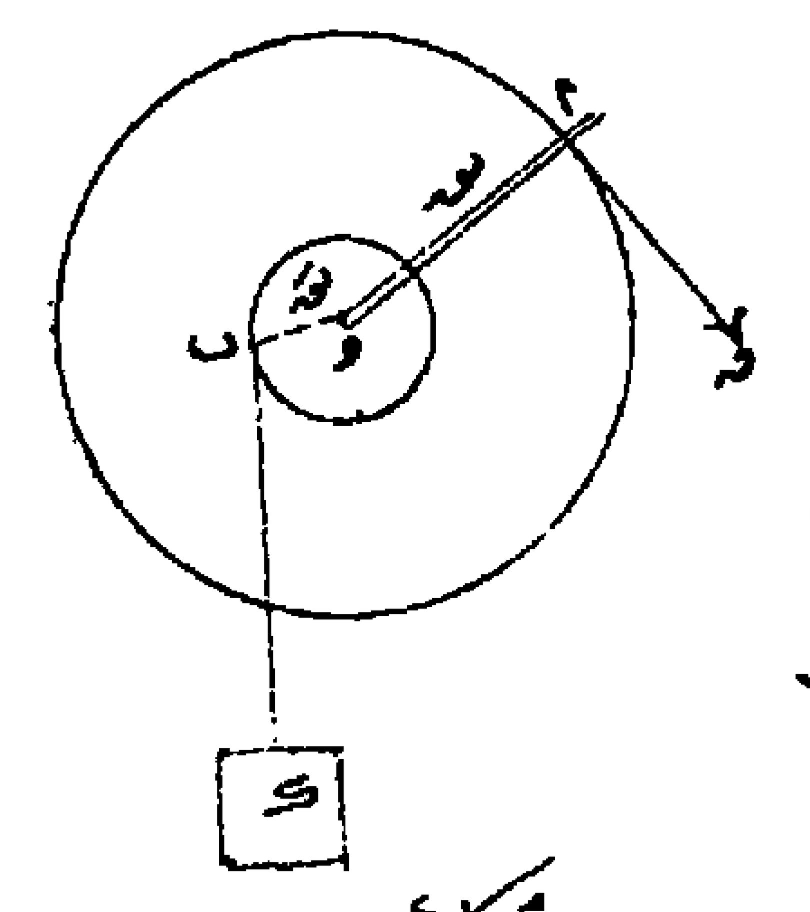
توازن الملفاف — حيث ان القوتين ق ، ك مؤثرتان بالتماس لمحيطين و ا ، و ب شكل ٤٣ فمتى دار الملفاف دورة كاملة يكون ش ق = ق × ٢ ط نق ،

ش ك = ك × ٢ ط نقَ

وحينئذ فمعادلة الشغل تكون

ق × ٢ ط نق = ك × ٢ ط نَق ومنها يحدث

$$\frac{\text{ق}}{\text{ك}} = \frac{\text{نَق}}{\text{نق}}$$



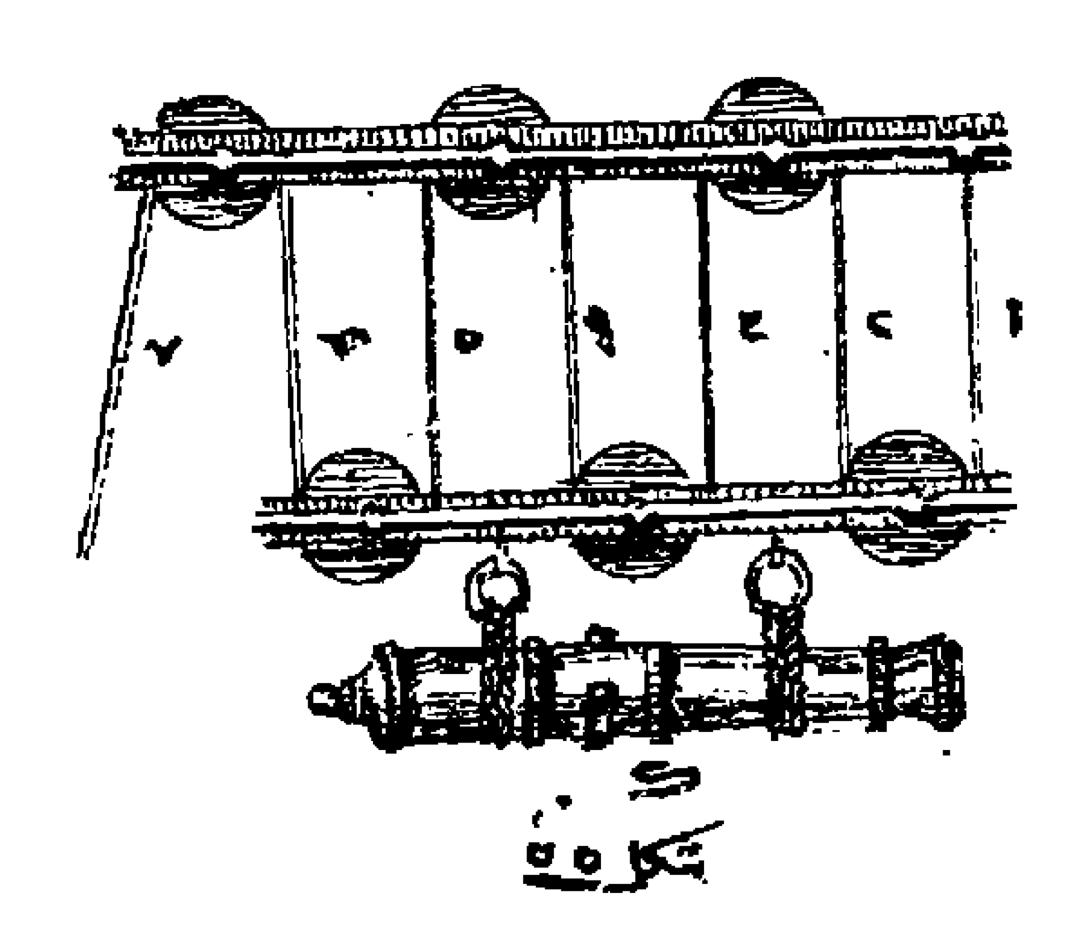
شكل ٥٤

وهي المعادلة المعروفة في الاستاتيك

توازن البلنكو – اذا كان البلنكو كما في شكل ٥٥ فانه اذا ارتفعت المقاومة ك بمقدار ه فان كلا من الستة أحبال ينقص بقدر الارتفاع المذكور والقوة ق الواقعة على نهاية الحبل السابع تنتقل بمقدار مساو الى ٦ ه ومعادلة الشغل تؤول الى

ك ه = ق × ٦ ه ومنها يحدث

$$\text{ق} = \frac{\text{ك}}{٦}$$



شكل ٥٥

توازن المستوى المائل – اذا فرض ان ل هي المسافة المقطوعة بالجسم على طول المستوى المائل شكل ٥٦ فان شغل القوة ق بموجب ما تقدم يكون مساويا الى

ق جتا ب × ل

وشغل المقاومة ك يكون مساويا الى

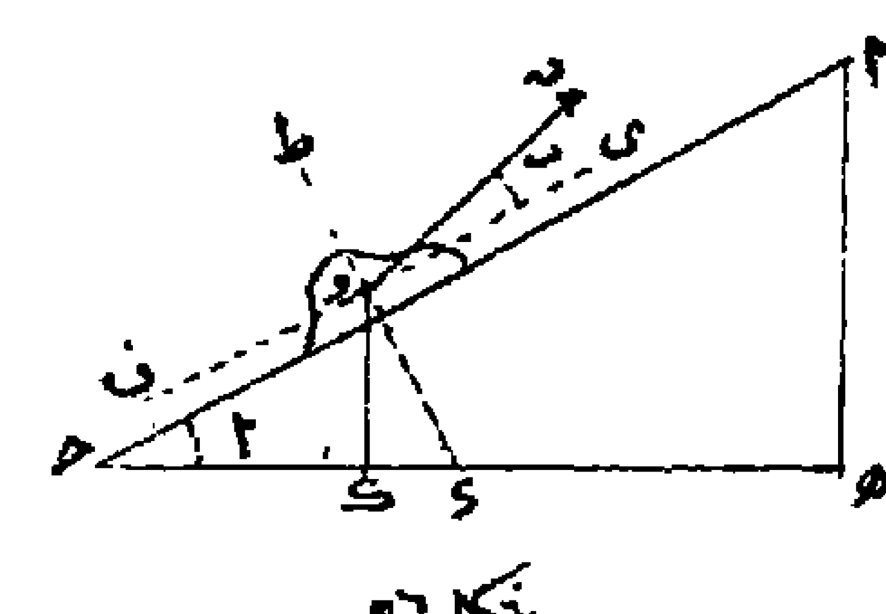
ل × ك جتا ك و ف أو

ك جا ا × ل

وحينئذ فمعادلة الشغل تكون

ق ل جتا ب = ك ل جا ا ومنها يحدث

$$\frac{\text{ق}}{\text{ك}} = \frac{\text{جا ا}}{\text{جتا ب}}$$



شكل ٥٦

وهذا هو الشرط الذي وجد في الاستاتيك بالنسبة للمستوى المائل

توازن الرافعة المضاعفة المستعملة لرفع العربات – لأجل رفع عربة بواسطة هذه الآلة شكل ٥٧ يشتبك أحد الاسنان م للرافعة ب ء اسفل الدبجل ويضغط على المقبض ا لنهاية الرافعة ب ا وبحساب مقدار الثقل ق اللازم ايقاعه على الرافعة ا ب المفروض انها افقية بحيث يتزن مع الثقل ك المؤثر في م بناء على معادلة الشغل

شكل ٥٧

نفرض ان مَ ، بَ ، اَ هي الانتقالات الآنية الصغيرة جدا للنقط م ، ب ، ا

وحينئذ من معادلة الشغل ق اَ = ك مَ يكون

$$\text{ق} = \text{ك} \times \frac{\text{مَ}}{\text{اَ}}$$

وحيث

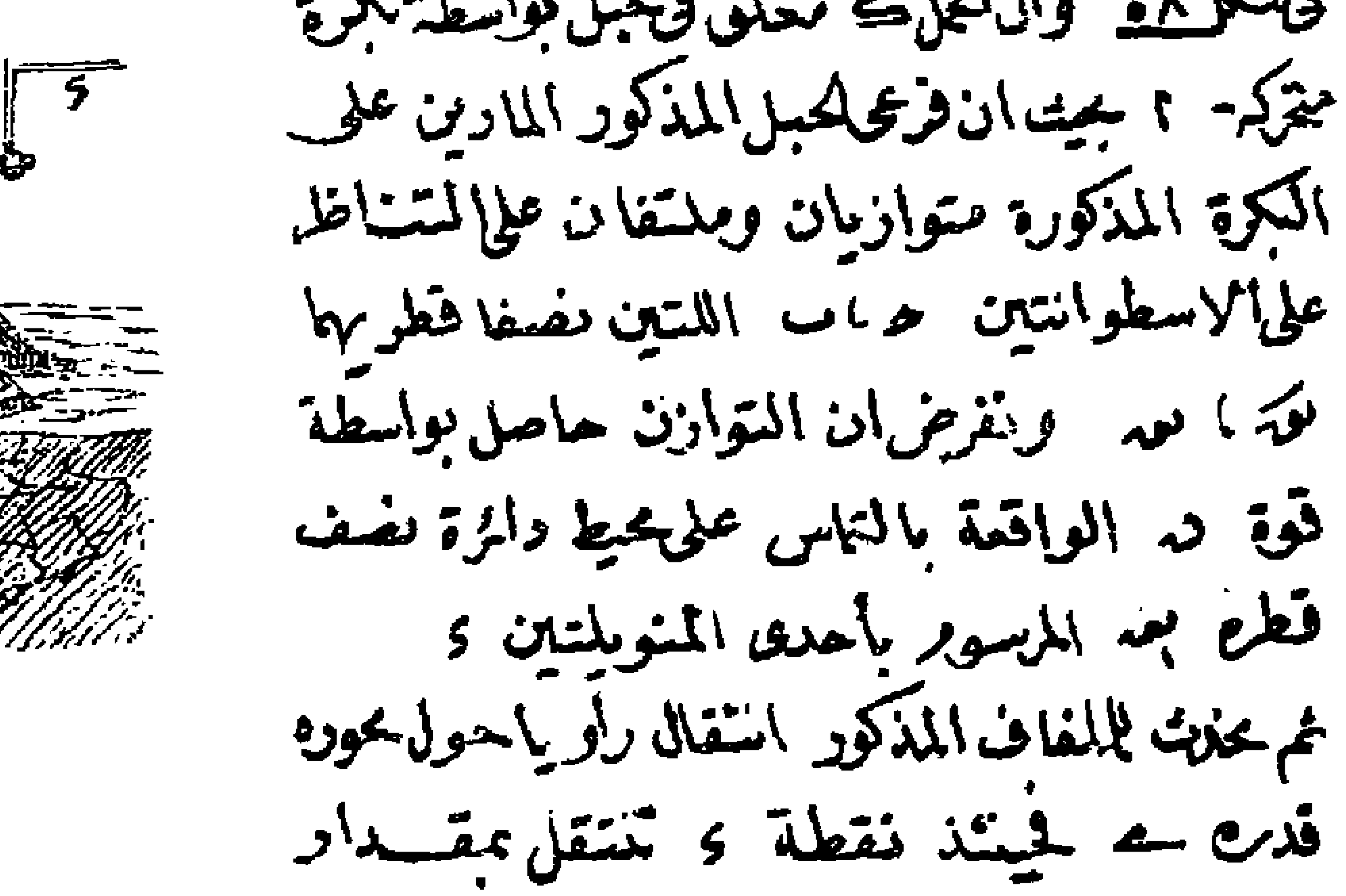
وحيث ان $\frac{\text{م}'}{\text{ت}'} = \frac{\text{ءم}}{\text{ءب}}$ ، $\frac{\text{ت}'}{\text{م}} = \frac{\text{حب}}{\text{مح}}$ فيكون

$\frac{\text{م}'}{\text{م}} = \frac{\text{ءم}}{\text{ءب}} \times \frac{\text{حب}}{\text{مح}}$ وحينئذ يكون

$$\text{ق} = \text{ك} \times \frac{\text{ءم} \times \text{حب}}{\text{ءب} \times \text{مح}}$$

وهذا المقدار هو عين المقدار الذى يستنتج بناء على شروط التوازن

توازن الملفاف الفرقى ـ لنفرض ملفافا اسطوانته مكونة من جزئين نصفا قطريهما مختلفان كما فى شكل ٥٨ وان الحمل ك معلق فى حبل بواسطة بكرة



متحركة م بحيث ان فرعى الحبل المذكور المارين على البكرة المذكورة متوازيان وملتفان على التناظر على الاسطوانتين ح ، ب اللتين نصفا قطريهما نق ، نع ونفرض ان التوازن حاصل بواسطة قوة ق الواقعة بالتماس على محيط دائرة نصف قطرها نع المرسوم بأحدى المنويلتين ء ثم نحدث للملفاف المذكور انتقال زاويا حول محوره قدره ى فحينئذ نقطة ء تنتقل بمقدار نع ى والفرع ه يلتف بمقدار نع ى والفرع ه' ينفك بمقدار نق ى والثقل ك يرتفع بمقدار نصف الفرق (نع ـ نق) ى ومعادلة الشغل تؤول الى

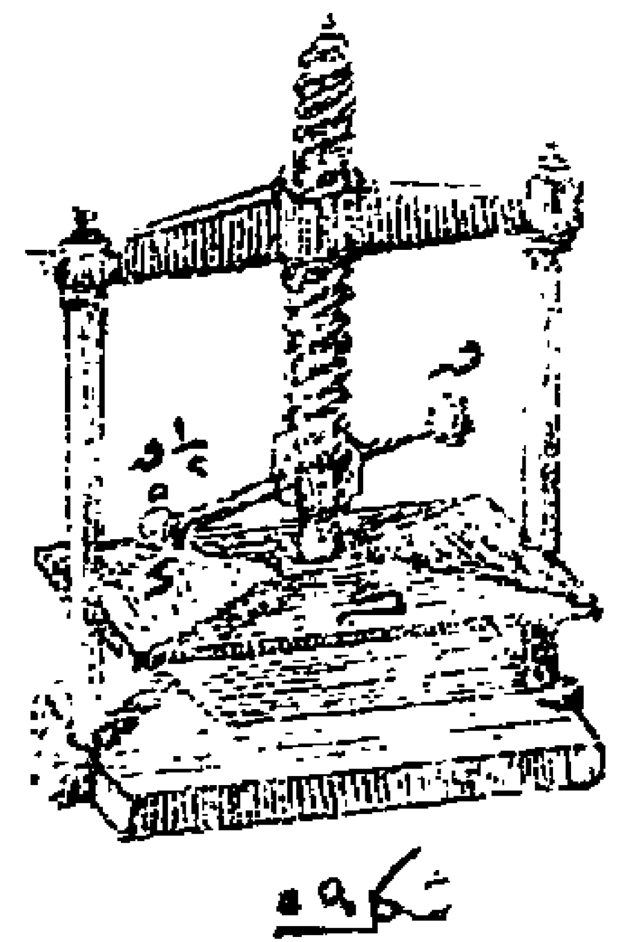
شكل ٥٨

$$\text{ق} \, \text{نع} \, \text{ى} = \text{ك} \times \frac{(\text{نع} - \text{نق})\,\text{ى}}{2}$$ او

$$\text{ق} = \frac{\text{ك}}{2} \times \frac{\text{نع} - \text{نق}}{\text{نع}}$$

وهو عين الشرط السابق ايجاده فى الاستاتيك

توازن البريمة ـ البريمة لا تستعمل فقط فى الآلات الدقيقة بل تستعمل ايضا بكثرة عندما يحتاج الأمر الى قوة عظيمة



شكل ٥٩

فحينئذ اذا قطعت القوة ق شكل ٥٩ المسافة ٢ ط ل فأن المقاومة ك تقطع الارتفاع ه ومعادلة الشغل تؤول الى

$\text{ق} \times 2\,\text{ط}\,\text{ل} = \text{ك}\,\text{ه}$ ومنها يحدث

$$\frac{\text{ق}}{\text{ك}} = \frac{\text{ه}}{2\,\text{ط}\,\text{ل}}$$

ويفهم من ذلك انه متى كانت البريمة متزنة يكون نسبة القوة الى المقاومة كنسبة خطوة البريمة الى طول المحيط المرسوم بنصف قطر مساو للذراع اى للولبية

توازن البريمة الفرقية ـ حيث انه فى هذه البريمة شكل ٦٠ تكون المسافة المقطوعة بالقوة مساوية

الى ٢ط ل والمسافة المقطوعة بالمقاومة مساوية الى هـ - هَ فمعادلة الشغل تؤول الى

ق × ٢ط ل = ك (هـ - هَ) ومنها يحدث

$$\frac{ق}{ك} = \frac{هـ - هَ}{٢ط ل}$$

شكل ٦٠

توازن البريمة غير المنتهية - حيث انه فى هذه الآلة شكل ٦١ تكون المسافة المقطوعة بالقوة هى ٢ط ل والمسافة المقطوعة بالمقاومة هى $\frac{هـ × نَ}{ن}$ فمعادلة الشغل تؤول الى

ق × ٢ط ل = ك × $\frac{هـ × نَ}{ن}$ ومنها يحدث

$$\frac{ق}{ك} = \frac{هـ نَ}{٢ط ل ن}$$

وحيث ان البسط أصغر كثير من المقام فحينئذ هذه الآلة تحدث تأثيرات عظيمة بقوة ضعيفة

شكل ٦١

تمرينات

(١) - المطلوب تحقيق قاعدة الشغل فى الآلات الآتية

الأولى البكرة الثابتة
الثانية البكرة المتحركة فى حالة مايكون الحبلين متوازيين
الثالثة الميار
الرابعة الملفاف
الخامسة المستوى المائل

(٢) المطلوب ايجاد شرط التوازن بناء على معادلة الشغل فى الآلات الآتية

الأولى البلنكو المعتاد
الثانية الملفاف ذو الطارة المسننة
الثالثة المعزة
الرابعة الميار الجسيم
الخامسة العفريتة
السادسة البلنكو الفرقى

(٣) المطلوب ايجاد شروط توازن البكرة المتحركة فى حالة مايكون الحبلان غير متوازيين وذلك بناء على معادلة الشغل

في المقاومات التأنوية

المقاومات التأنوية هي التي تتبتع جزأ من الشغل بدون ان تحدث أدنى تأثير مفيد والمقاومات التأنوية الرئيسة هي

أولا الأحتكاك

ثانيا مقاومة الأوساط

ثالثا التصادمات

رابعا يبوسة الأحبال

ولنتكلم على تلك المقاومات بالترتيب فنقول

في الأحتكاك

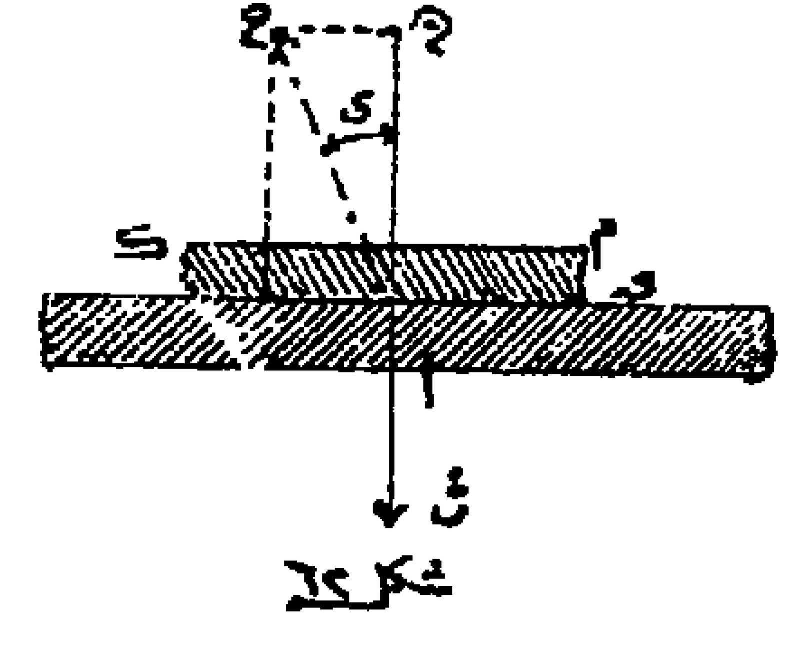
قد ظهر من التجربة أنه لأجل زلق جسم ما على مستو افقي يلزم وجود قوة ذات شدة معينة بحيث اذا أثر عليه بتأثير أقل من تلك القوة يبقى الجسم المذكور ساكنا وحينئذ فذلك الجسم يكون متأثرا بثقله وبالقوة التي تميل لتحريكه ولكن حيث أن هاتين القوتين لهما محصلة مائلة على المستوى ولا تنعدم الا برد فعل ذلك المستوى فحينئذ يكون رد الفعل المذكور مائلا على سطح المستوى المذكور ويمكن تحليله الى قوتين احداهما عمودية على المستوى وتتزن مع ثقل الجسم المذكور ولا تحدث ادنى مقاومة للحركة والأخرى مماسة للسطح السابق ذكره وهي التي يلزم ان يتغلب عليها لأجل تحريك ذلك الجسم

وحينئذ متى ابتدأ الجسم المذكور في الحركة فأن رد الفعل المماس يكون هو الأحتكاك في مبدأ الحركة

وقد ظهر من التجربة أيضا أنه متى كان الجسم متحركا على سطح افقي بناء على سرعته المكتسبة فانحركته تأخذ في النقص بالاستمرار الى ان يسكن المتحرك المذكور ويفهم من ذلك حينئذ انه لابد من وجود قوة متجهة في الجهة المضادة للحركة كانت سببا في أعدام القدرة الحية التي كانت لذلك الجسم فهذه القوة المماسة للسطح المذكور هي الاحتكاك في اثناء الحركة

وعلى هذا فلا يكون لقوة الأحتكاك وجود متى كان الجسم غير متأثر بالحركة وأنها تأخذ في الظهور متى مالت قوة لتحريكه وتتزايد بازدياد القوة المحركة الى ان يتحرك الجسم المذكور وحينئذ فتكون مساوية للقوة المحركة المذكورة ثم ان قوة الاحتكاك تنقص عادة قليلا بمجرد تحرك الجسم وبعد ذلك تبقى ثابتة في مدة الحركة

وقوة الاحتكاك هي دائما متجهة في الجهة المضادة للحركة



زاوية الأحتكاك — اذا فرض جسم م شكل ٦٦ موضوع على مستو افقي وكان متأثرا بثقله ث فقط فأن رد الفعل ح للمستوى يكون مساويا ومضادا مباشرة للثقل ث لكن اذا أوقع على الجسم المذكور قوة مثل ف بحيث يصير ازديادها شيئا فشيئا الى أن يتحرك الجسم فأن تلك القوة تكون مساوية لقوة

الاحتكاك ك

وحينئذ فالجسم يكون متأثراً بالقوتين ث ، ه وبرد الفعل ع للمستوى ورد الفعل هذا يمكن اعتباره مؤثراً في النقطة ا التي هي نقطة تلاقي الرأسي المار بمركز ثقل الجسم بالمستوى الأسفل له وحيث أن الجسم متزن فيلزم ان يكون رد الفعل ع مساوياً ومضاداً مباشرة لمحصلة القوتين ه ، ث

اذا تقرر هذا فالزاوية ى التي يصنعها رد الفعل المذكور مع الخط العمودي للسطح المضغوط هي ما تسمى بزاوية الاحتكاك

معامل الاحتكاك - معامل الاحتكاك هو النسبة بين قوة الاحتكاك والضغط العمودي للجسم على السطح المضغوط وحينئذ اذا رمز لمعامل الاحتكاك المذكور بالرمز ى يكون

$$ى = \frac{ك}{ح} = \frac{ه}{ث}$$

ولكن من مثلث ا ع ح القائم الزاوية يحدث

$$\frac{ع ح}{ا ح} = \frac{ك}{ح} = ظا ى$$ وعليه يكون

$$ى = ظا ى$$

أعني ان معامل الاحتكاك يساوي ظل زاوية الاحتكاك

ممارسة الاحتكاك بالتجربة

الاحتكاك في مبدأ الحركة - قوانين الاحتكاك وضعها المعلم كولومب بناء على التجارب التي اجراها ثم حققها بعده المعلم موران بطرق دقيقة جداً كما يأتي

وهي أنه جعل مدادة عريضة من البلوط ا ب شكل ٦٢ افقية بالضبط ووضع عليها صندوقاً ف مشتملاً على ثقل معلوم وربط ذلك الصندوق بحبل مرتبط بدينامومتر ع ومار على مقر بكرة ه ثم علق في نهاية الحبل المذكور كفة مثل ط ووضع فيها اثقالاً تدريجياً الى ان ابتدأ الصندوق ف في التحرك ورصد شدة الحبل من الدينامومتر ع فهذه الشدة تكون مساوية لقوة الاحتكاك ك وبقسمة تلك القوة على ث الذي هو عبارة عن الضغط الرأسي للصندوق على المدادة ينتج مقدار معامل الاحتكاك ى في مبدأ الحركة

شكل ٦٢

ويمكن تغيير مقدار الحمل الذي يوضع داخل الصندوق وكذلك السطوح المحتكة بتكسية المدادة وقاع الصندوق من الخارج بالسطوح المختلفة التي يراد اجراء التجربة عليها

الاحتكاك في مدة الحركة - قد وصل المعلم موران حركة البكرة ه بجهاز مبين للحركة فرأى ان حركة الصندوق منتظمة العجلة وعلم حينئذ انها ناشئة من قوة ثابتة (بموجب ما تقدم) وتلك القوة المحركة

تساوي

تساوى بداهة للفرق بين شد الحبل للصندوق الذى يرمز له بالرمز ش وبين قوة الاحتكاك مدة الحركة التى يرمز لها بالرمز كَ ولكن قد ظهر من رصد الديناموميتر أن ش ثابت مدة تحرك الصندوق وحيث أن الفرق ش ـ كَ ثابت أيضاً كما تقدم فيعلم من ذلك أن كَ تكون ثابتة وعليه فتكون قوة الاحتكاك غير متعلقة بالسرعة

ولأجل تعيين مقدار كَ تقدر بالضبط المسافة ه التى يقطعها الصندوق فى الزمن ز ثم نرمز لثقل الكفة ط مع الحمل الذى فيها بالرمز ق ولثقل الصندوق مع حمله بالرمز ث ثم يقال

حيث ان القوة ق ـ كَ تحدث للجسم $\frac{ق+ث}{ج}$ حركة منتظمة العجلة التى نرمز لعجلتها بالرمز و فيكون

$$ق - كَ = \frac{ق+ث}{ج} \times و$$

ولكن بموجب ما تقدم $ه = \frac{و ز^2}{2}$ ومنها يحدث

$$و = \frac{2ه}{ز^2}$$ وعليه يكون

$$ق - كَ = \frac{ق+ث}{ج} \times \frac{2ه}{ز^2}$$ أو

$$كَ = ق - \frac{ق+ث}{ج} \times \frac{2ه}{ز^2}$$

ومن هذه المعادلة يتعين مقدار كَ وبقسمة كَ على ث يحصل على مقدار معامل الاحتكاك فى مدة الحركة الذى يرمز اليه بالرمز ىَ

قوانين الاحتكاك ـ قد ظهر من تجارب المعلم كولومب والمعلم موران القوانين الآتية

الأول قوة الاحتكاك تناسب الضغط العمودى

الثانى انها تتعلق بجنس سطوح التماس

الثالث انها غير متعلقة باتساع سطوح التماس

الرابع انها غير متعلقة بسرعة الحركة

الخامس بالنسبة للأجسام القابلة للانضغاط فانه بعد حصول التماس بمدة قليلة يكون الاحتكاك كبيراً فى مبدأ الحركة عن مدة الحركة وأما بالنسبة للاجسام الصلبة فيقطع النظر عن هذا الفرق بسبب أنه يكون صغيراً جداً

تنبيهات

الأول ـ ولو أن قوة الاحتكاك غير متعلقة بالسرعة لكن الشغل المستلزم بالاحتكاك ليس كذلك لأنه اذا رمز للضغط العمودى بالرمز ق ولسرعة الجسم بالرمز ع ولمعامل الاحتكاك بالرمز ى فان مقدار شغل الاحتكاك فى مدة ثانية يكون

$$\text{شغل الاحتكاك} = ق ى \times ع$$

ويفهم من ذلك ان شغل الاحتكاك مناسباً للسرعة

الثانى ـ القانون الرابع للاحتكاك لم يحققه المعلم موران الا بالنسبة للسرع المحصورة بين صفر

واربعة امتار في الثانية لكن قد ثبت من التجارب الأخيرة أنه متى وصلت السرعة الى ٢٠م في الثانية فأن الأحتكاك ينقص نقصا ظاهرا بمجرد ازدياد السرعة عن الحد المذكور

احتكاك الاصابع — اعلم ان احتكاك الأصابع على مساندها هو عين احتكاك السطوح المستوية على بعضها ومن المهم اعطاء الأصابع قطرا أصغر ما يمكن بحيث يكون مناسبا لصلابة الآلة لأنه اذا فرض ان نق هو نصف قطر الأصبع وان ف هو الضغط العمودي الذي يحدثه الأصبع على المسند وأن ع هو معامل الاحتكاك وان ن هو عدد الدورات في الدقيقة فتكون قوة الاحتكاك هي ف ع

والمسافة المقطوعة في الثانية هي ٢ ط نق ن

والشغل المبتلع بالاحتكاك الذي يرمز اليه بالرمز ش هو ش = ٢ ط ع ن نق ف

ويرى من ذلك ان الشغل العادم بالاحتكاك يزداد تبعا لنصف قطر الأصبع ويكون من المفيد حينئذ تقليل نصف القطر المذكور وانما يمكن تطويل الأصبع بدون حصول ادنى ضرر حيث ان الأحتكاك غير متعلق باتساع سطوح التماس

الدهانات — قد ظهر من التجربة ان الاحتكاك ينقص نقصا عظيما باستعمال الدهانات الموافقة بين السطوح المحتكة فأن معامل احتكاك الحديد على الظهر الذي هو ٠,٥ ر يخفض الى ٠,٠٣ ر باستعمال دهان الزيت المجدد بالاستمرار

ويفهم من ذلك حينئذ انه من الضروري دهان السطوح المحتكة وأن آلات التزييت او التشحيم هي من الأمور المهمة جدا

وأحسن الدهانات في جميع الأحوال هو الدهان السائل الذي لا يندفع الى الخارج في الأحوال المستعمل فيها

فالهواء يكون دهانا جيدا اذا أمكن حفظه بين السطوح المحتكة والماء يكون افضل من الزيت ان لم يكن سريع الانقذاف بالسهولة وقد يستعمل الماء بكثرة لمنع تسخين القطع بالاحتكاك وفي هذه الحالة يفضل استعمال ماء الصابون

تطبيقات الأحتكاك

ولو أن الأحتكاك مقاومة ثانوية تبتلع عادة بلا فائدة جزءا من الشغل المحرك الا أنه مفيد في كثير من الأحوال فأنه لولا الاحتكاك لما امكن سير الآدمي والحيوانات ووابورات السكك الحديد على الأرض وعلى القضبان وما امكن تثبيت المسامير المعتادة والمسامير البرمة في الاجسام الناعمة وما أمكن ثبات سيور الحركة على طنابيرها وما أمكن ثبات المستويات المائلة بميل قليل وهكذا

فالاحتكاك هو السبب في ابطاء سير العربات بواسطة الفرامل التي هي عبارة عن قطع من الخشب يمكن زنقها على العجل بواسطة رافعة ذات برمة في بعض الآلات وعلى الخصوص في العيارات الجبية (أي الونشات) تستعمل فرملة ذات شريط شكل ٦٤ لمنع الأحمال من النزول بسرعة عظيمة

وهي

وهى عبارة عن شريط معدنى ا ب ﻫ مرتبط برافعة على شكل مخصوص ك و و ﺣ تسمح بزنق الشريط المذكور بشدة على محيط طارة م مَ

شكل ٦٤

الفرملة الديناموميترية للمعلم برونى ـ قد استعمل المعلم برونى الاحتكاك بفائدة عظيمة لتقدير شغل محور الحركة فى الآلات المستعملة لادارة ورشة بواسطة آلة مخصوصة منسوبة له عبارة عن فرملة وهى تتركب كما فى شكل ٦٥ من قضيب ك ب ء معلق فى نهايته كفة ﺣ وهذا القضيب مثبت على محور الحركة ا بواسطة طوق من الخشب و ى ف الذى يمكن زنقه على المحور المذكور بالاختيار بواسطة الصامولتين ف ا فَ وبواسطة المانعين ﻫ ك يمكن منع الرافعه ب ء من الدوران مع محور الحركة

شكل ٦٥

فلتقدير الشغل بواسطة الآلة المذكورة يمنع اتصال الآلة المحركة بجميع الات الورشة (أى المكنات) ويزنق الطوق و ى ف تدريجيا الى ان تكون سرعة محور الحركة مساوية لسرعة حالة الانتظام ثم يوضع بعد ذلك فى الكفة ﺣ اثقال الى ان تصير الرافعة افقية وحينئذ فيكون الاحتكاك مبتلعا للشغل الذى كان يلزم ان يؤديه محور الحركة لمكنات الورشة

وعلى هذا اذا رمز لقوة الاحتكاك بالرمز ﻫ ولنصف قطر محور الحركة بالرمز نه ولعدد الدورات فى الثانية بالرمز ﻥ فيكون شغل الاحتكاك مبينا بالمعادلة الآتية

ش ﻫ = ﻫ × ٢ ط نه × ﻥ

وحيث ان الرافعة افقية فيكون الثقل ث الموضوع فى الكفة متزنا مع قوة الاحتكاك وحينئذ اذا رمز لطول ذراع الرافعة بالرمز ل يكون

ﻫ × نه = ث × ل وعليه يكون

ش ﻫ = ث ل × ٢ ط × ﻥ

وحيث ان جميع الكميات الداخلة فى الطرف الثانى يمكن تقديرها بالضبط فيتعين مقدار شغل الاحتكاك اى شغل محور الحركة بالضبط كذلك

ولاجل قطع النظر عن ثقل الفرملة فى اثناء العمل بها يوضع فى طرفها ب ثقل اتزان بحيث ان الرافعة تكون افقية متى كانت متأثرة بالتثاقل فقط والا يلزم ان يعلق القضيب من نقطة ء فى ديناموميتر قبل زنق الفرملة على المحور ويقدر الشغل الذى اذا وضع فى الكفة ﺣ يحدث تأثيرا مساويا للتأثير

الناتج من ثقل الفرملة ثم يضاف الثقل المقدر المذكور الى الحمل الذى يوضع فى الكفة حـ

مقاومة الاحتكاك فى التدحرج

قد ظهر من التجربة أنه لاجل تدحرج اسطوانة على سطح مستو افقى يلزم وجود قوة معينة ويلزم أيضا قوة لحفظ انتظام الحركة وحينئذ فالسطح المذكور يحدث مقاومة للتدحرج تسمى باحتكاك التدحرج أو باحتكاك من النوع الثانى

الممارسة التجربية لاحتكاك التدحرج — قد عملت هذه التجربة بوضع اسطوانة أو درفيل على مدادتين موضوعتين فى استواء واحد افقى بالضبط شكل ٦٦ وهذا الدرفيل يمكن تحميله باثقال متساوية معلقة فى نهايات أحبال موضوعة عليه كى يصير ثقله كبيرا ثم يحصل تحريك الدرفيل المذكور بوضع اثقال فى الكفة حـ المعلقة فى الحبل ب الملتف على الاسطوانة جمله لفات وقد ظهر من تلك التجربة ما يأتى

قوانين احتكاك التدحرج — اولا ان المقاومة للتدحرج متناسبة للحمل وثانيا متناسبة عكسا لقطر الاسطوانة أو الدرفيل

شكل ٦٦

وحينئذ اذا رمز بالرمز ك للمقاومة للتدحرج وبالرمز ءً لمعامل احتكاك التدحرج وبالرمز ع للحمل وبالرمز ب لقطر الدرفيل يكون

$$ك = ءً \frac{ع}{ب}$$

وقد ظهر ان معاملات الاحتكاك فى التدحرج اصغر كثيرا من معاملات الاحتكاك فى الانزلاق وحينئذ عندما يراد تحويل الانزلاق بالتدحرج تستعمل الدرافيل لتحريك الاثقال عوضا عن زلقها على الأرض وبتحويل الصناديق المجرورة على قاعها بعربات ليستعاض الاحتكاك الانزلاقى للصندوق باحتكاك تدحرجى للعجل على الأرض واحتكاك انزلاقى للمحاور فى عليها وهكذا

(تنبيه) — فى حالة التدحرج كما فى حالة الانزلاق يكون الاحتكاك فى مدة الحركة أقل من الاحتكاك فى مبدأ الحركة وبمجرد حصول الحركة فان معامل الاحتكاك فى مبدأ الحركة ينقص دفعة واحدة لاجل ان يكون مقداره مساويا لمقدار الاحتكاك فى مدة الحركة وهاك جدولين مشتملين على معاملات الاحتكاك

معاملات الاحتكاك

الاحتكاك في الانزلاق					
جنس السطوح المحتكة	حالة السطوح المحتكة	في مبدأ الحركة		في مدة الحركة	
		معامل الاحتكاك	زاوية الاحتكاك	معامل الاحتكاك	زاوية الاحتكاك
بلوط على بلوط	بدون دهان	٠٫٦٢	٣١° ٤٨'	٠٫٤٨	٢٥° ٣٩'
شرحه	منديان بالماء	٠٫٧١	٣٥° ٢٢'	٠٫٢٥	١٤° ٠٣'
شرحه	الدهان بالصابون الجاف	٠٫٤٤	٢٣° ٤٥'	٠٫١٦	٩° ٠٦'
شرحه	الدهان بالشحم	٠٫١٩	١٠° ٤٦'	٠٫٠٧	٤° ٣٥'
حديد على بلوط	بدون دهان	٠٫٦٢	٣١° ٤٨'	٠٫٦٢	٣١° ٤٨'
شرحه	منديان بالماء	٠٫٦٥	٣٣° ٠٢'	٠٫٢٦	١٤° ٣٥'
شرحه	الدهان بالشحم	٠٫١٢	٦° ٥١'	٠٫٠٨	٤° ٤٠'
سير من الجلد على بكرة من الزهر	بدون دهان	٠٫٢٨	١٥° ٣٩'	٠٫٥٦	٢٩° ١٥'
شرحه	منديان بالماء	٠٫٣٨	٢٠° ٤٩'	٠٫٣٦	١٩° ٤٨'
معادن على معادن	بدون دهان	٠٫١٩	١٠° ٤٦'	٠٫٢٠	١١° ١٩'
شرحه	الدهان بشحم الخنزير	٠٫١٠	٦° ٠٠'	٠٫٠٩	٤° ٥٠'
شرحه	الدهان بزيت الزيتون	٠٫١٢	٦° ٥١'	٠٫٠٧	٤° ٣٥'

احتكاك الاصابع على مساندها			الاحتكاك في التدحرج	
السطوح المحتكة	حالة السطوح المحتكة	معامل الاحتكاك	تدحرج العربات التى دائر عجلها من حديد على جسور افقية	معامل الاحتكاك
زهر على زهر	بدهان دسم	٠٫١١	الجسر مبلط حديد	٠٫٠٦٣٤
شرحه	الدهان بالزيت أو بشحم الخنزير	٠٫٠٨	حالة صيانة الجسر اعتياديه	٠٫٠٤١٤
زهر على طوج	بدون دهان	٠٫١٩	الجسر مبلط وحالة الصيانة اعتياديه	٠٫٠٢٣٨
شرحه	الدهان بالزيت أو بشحم الخنزير	٠٫٠٧	الجسر مجر وحالة الصيانة جيدة جدا	٠٫٠١٥٠
حديد على طوج	بدهان دسم قليلا	٠٫٢٥	سطح الجسر مكون من مدادات من البلوط الخام	٠٫٠١٠٢
شرحه	بدهان دسم ومنديان بالماء	٠٫١٩	التدحرج على اشرطة مسطحة من الحديد	٠٫٠٠٣٥
شرحه	الدهان بشحم الخنزير العتيق	٠٫٠٩	التدحرج على قضبان من الحديد	٠٫٠٠١٢
شرحه	الدهان بالزيت أو بشحم الخنزير	٠٫٠٧		
شرحه	الدهان بالزيت المتجدد باستمرار	٠٫٠٣		

توازن جسم على مستو مائل باعتبار الاحتكاك

اذا فرض أولا ان الجسم الموضوع على مستو مائل شكل ٦٧ غير متأثر الا بالثقل فمن البديهى ان الحركة تحصل فى هذه الحالة على اتجاه المستقيم الاعظم ميلا للمستوى

وفى هذه الحالة يكون الجسم المفروض منقادا فى اتجاه المستقيم المذكور لتأثير قوتين احداهما ث حا ا وهى القوة المحركة والأخرى الاحتكاك وهو القوة المقاومة وحيث ان هذا الاحتكاك يناسب بناء على ما تقدم الضغط العمودى ث حا ا الواقع على المستوى المائل من الجسم السالف ذكره فاذا رمز بحرف ء لمعامل الاحتكاك الموافق للسطحين المحتكين يكون مقدار الاحتكاك المذكور هو

شكل ٦٧

ء ث حا ا

وحيث ان الاحتكاك يقاوم الحركة دائما فيرى انه اذا تحرك الجسم يكون تحركه ناشئا عن المحصلة

ث حا ا ـ ء ث حا ا

فاذا كان ا = ٠ يكون حا ا = ٠ ، حا ا = ١ ولكن حيث أنه بازدياد ا يزداد حا ا وينقص حا ا وكان ث ، ء ثابتين فلا بد أن يوجد للزاوية ا مقدار به يكون

ث حا ا = ء ث حا ا ومنه يحدث

ء = حا ا / حا ا = ظا ا . . . . (١)

وهذه المعادلة تحقق ما تقدم والزاوية التى تحقق هذا الشرط تسمى بزاوية الانزلاق أو بزاوية الأحتكاك كما تقدم

ومن الارتباط (١) تنتج طريقة لتعيين مقادير معاملات احتكاك الأجسام ويكفى لذلك تمييل المستوى الى ان تبتدأ الحركة وتعيين زاوية ا وبناء عليه يتعين ظا ا الذى هو مقدار ء ويشاهد من الارتباط السابق أيضا أنه بالنسبة لزاوية الانزلاق يحصل التساوى بين المركبة المحركة ث حا ا وبين الاحتكاك ء ث حا ا ويكون الجسم حينئذ متزنا توازنا غير ثابت أعنى انه يتحرك بادنى قوة

وعند ما تزيد زاوية ا عن زاوية الانزلاق فالقوة المحركة ث حا ا تصير اعظم من قوة الاحتكاك وتحصل الحركة حينئذ

ومتى كانت الزاوية ا أقل من مقدار زاوية الانزلاق اى زاوية الاحتكاك فالمركبة ث حا ا تكون أقل من الأحتكاك ء ث حا ا وحيث ان الأحتكاك ليس قوة محركة فقط فينتج من ذلك أن الجسم يكون متزنا توازنا ثابتا

وحيث انه من معادلة (١) يرى ان معامل الاحتكاك يساوى ظل زاوية الانزلاق فاذا كان مثلا ا = ١١°

يكون

يكون ء = طا أ = ١٩٤٠,٠

وإذا قطع النظر عن الاحتكاك يحصل على الارتباطات السابقة في الاستاتيك

وثانيا إذا كان للجسم متأثرا بقوى مختلفة خلاف التثاقل فلا يحل ان الجسم المذكور يتبع اتجاه المستقيم الأعظم ميلا في هذه الحالة يلزم ان محصلة القوى الأخرى توجد في مستو رأسي مار بالمستقيم المذكور وحينئذ إذا فرض كما في شكل ٦٧ أن ك هي محصلة القوى المؤثرة على الجسم خلاف ثقله وأن ث هو ثقل الجسم المذكور وأن ﻫ هي الزاوية التي تصنعها القوة ك مع المستقيم الأعظم ميلا للمستوى وأن أ هي زاوية ميل المستوى على الأفق يحلل كل من القوتين ث ، ك الى قوتين أخرتين احداهما موازية للمستوى المائل والأخرى عمودية عليه وحينئذ فمحصلة القوتين الموازيتين للمستوى المائل تكون هي القوة المحركة وهذه المحصلة من بعد ملاحظة أن المركبتين يؤثران في جهتين متضادتين بناء على شكل ٦٧ السابق يكون مقدارها مساويا الى

ث حا أ ـ ك حا ﻫ .... (٢)

ومحصلة المركبتين العموديتين على المستوى المذكور تكون هي الضغط الواقع بين السطحين المحتكين ويتولد عنها الاحتكاك وهذه المحصلة من بعد ملاحظة ان المركبتين المذكورتين يؤثران في جهتين متضادتين تكون مساوية الى

ث حا أ ـ ك حا ﻫ ..... (٣)

وهو مقدار يجب ان يكون دائما موجبا كي يتحرك الجسم المفروض على المستوى المذكور باحتكاك وإذا كان المقدار المذكور معدوما يتحرك الجسم المذكور بالتوازي للمستوى المائل بدون احتكاك وإذا كان ذلك المقدار سالبا فان الجسم يتباعد عن المستوى السالف ذكره

وحيث ان المقدار السابق هو مقدار الضغط العمودي الواقع بين السطحين المحتكين فيكون مقدار الاحتكاك هو

ء (ث حا أ ـ ك حا ﻫ)

وحيث أن الاحتكاك يؤثر دائما في الجهة المضادة للحركة فينتج من ذلك أنه متى كان ث حا أ > ك حا ﻫ أعني متى كان المقدار (٢) موجبا فانه إذا تحرك الجسم ينزل على المستوى المائل ويتحرك عليه كما إذا كان مطلقا بالكلية وغير متأثر الا بالمحصلة الوحيدة

ث حا أ ـ ك حا ﻫ ـ ء (ث حا أ ـ ك حا ﻫ)

وكذا يقال كما في الحالة الأولى ان الجسم يتحرك أو يصير في توازن غير ثابت أو في توازن ثابت على حسب ما تكون تلك المحصلة موجبة أو معدومة أو سالبة على التناظر

وإذا كان ث حا أ < ك حا ﻫ أعني متى كان مقدار (٢) سالبا فانه إذا تحرك الجسم يصعد على المستوى المائل المذكور ويتحرك عليه كما إذا كان متأثرا بالقوة الوحيدة

ك حا ء - ث حا ١ - ء (ث حا ١ - ك حا ء)

وكما في الحالة السابقة فأن الجسم يتحرك صاعدا على المستوى أو يصير في توازن غير ثابت أو في توازن ثابت على حسب ماتكون تلك المحصلة موجبة أو معدومة أو سالبة على التناظر ومهما كان اتجاه القوة ك حول نقطة م أعني مهما كان مقدار زاوية ء فتتعين شروط الحركة أو التوازن كما ذكر

فاذا اثرت القوة ك على يمين ح ع فأن ارتباط (٢) يبقى بعينه وأما اذا اثرت على يسار ح ع المذكور فمركبتها ك حا ء تنضم على المركبة ث حا ١ ويؤول الارتباط المذكور الى

ث حا ١ + ك حا ء

، ء هي دائما أصغر الزوايا التي تكونها القوة ك مع المستوى المذكور

واذا اثرت القوة ك أعلى المستوى فأن ارتباط (٣) يبقى بعينه واذا اثرت أسفله فان المركبة ك حا ء تنضم على ث حا ١ ويؤول ارتباط (٣) المذكور الى

ث حا ١ + ك حا ء

حركة جسم منزلق على مستوى مائل - حيث انه بناء على ما ذكر يمكن ان تؤول جميع القوى الثابتة المؤثرة على المتحرك الى قوة واحدة ثابتة متجهة في اتجاه المستقيم الاعظم ميلا للمستوى فالمتحرك يتحرك في اتجاه ذلك المستقيم بحركة منتظمة العجلة وحينئذ اذا قسمت القوة الوحيدة د المؤثرة على المتحرك على الجسم م = ث/ه للمتحرك المذكور فانه يحصل على العجلة و بناء على ما تقدم ومتى علمت تلك العجلة فأنه يمكن معرفة مقدار السرعة المكتسبة في نهاية الزمن ز وهو و ز ثم المسافة ه المقطوعة في نهاية الزمن المذكور وهي ½ و ز٢

واذا فرض أن د = ٢٠ كيلوجراما ، ث = ١٠٠ كيلوجراما ، ز = ١٠ ث فأنه يكون

م = ث/ه = ١٠٠/٩,٧٩ = ١٠٠ × ١٠٢, = ١٠,٢ ،

و = د/م = ٢٠/١٠,٢ = ١,٩٦ متر ،

ع = و ز = ١,٩٦ × ١٠ = ١٩,٦ متر ،

ه = ½ و ز٢ = (١,٩٦ × ١٠٠)/٢ = ٩٨,٠٠ متر

المتحرك على مستوى مائل أملس - اذا فرض ان المتحرك ليس متأثرا الا بثقله الخاص وينزلق بدون احتكاك على المستوى المائل يقال

أنه في هذه الحالة حيث ان القوة الوحيدة التي تحدث الحركة هي عبارة عن المركبة ث حا ١ للثقل ث الموازي للمستوى فعجلة المتحرك تكون بناء على ما تقدم هي

و = ث حا ١ / م = ث حا ١ / (ث/ه) = ه حا ١

وحينئذ

وحينئذ فالسرعة المكتسبة في نهاية الزمن ز تكون هي

$$\text{ع} = \text{ء جا ا} \times \text{ز} \;\ldots\ldots\ldots\; (1)$$

ثم ان المسافة المقطوعة في نهاية الزمن ز المذكور تكون هي

$$\text{ف} = \tfrac{1}{2}\,\text{ء جا ا} \times \text{ز}^{2} \;\ldots\ldots\ldots\; (2)$$

فاذا كان ف عبارة عن الطول الكلي ل للمستوى وكان ز هو الزمن الذي فيه ينزل المتحرك من رأس المستوى المذكور لغاية نهايته السفلى ده فانه يكون

$$\text{ل} = \tfrac{1}{2}\,\text{ء جا ا} \times \text{ز}^{2}$$ ومنها يحدث

$$\text{ز} = \sqrt{\frac{2\,\text{ل}}{\text{ء جا ا}}} \;\ldots\ldots\ldots\; (3)$$

واذا وضع مقدار ز هذا عوضا عنه في معادلة السرعة فانه يحدث

$$\text{ع} = \text{ء جا ا} \times \sqrt{\frac{2\,\text{ل}}{\text{ء جا ا}}} = \sqrt{2\,\text{ء ل جا ا}}$$

وبملاحظة أن ل جا ا عبارة عن الارتفاع ر للمستوى المائل يكون

$$\text{ع} = \sqrt{2\,\text{ء ر}}$$

وحينئذ فالسرعة التي يكتسبها المتحرك عند مجيئه في نهاية المستوى من أسفل تكون مساوية للسرعة التي يكتسبها عند سقوطه رأسيا من الارتفاع ر بتأثير التثاقل فقط

وما قيل على الطول الكلي للمستوى المائل يمكن ان يقال على جزء حيثما اتفق لَ من طوله وعليه فاذا قطع المتحرك الطول لَ يكون

$$\text{عَ} = \sqrt{2\,\text{ء رَ}}$$

اعني أنه متى قطع المتحرك مسافة حيثما اتفق على طول المستوى المائل فانه يكتسب سرعة قدرها عَ مساوية للسرعة التي يكتسبها لو سقط بالحرية من الارتفاع الرأسي رَ الذي نزل منه على المستوى المائل المذكور

وحيث ان مقدار السرعة ع غير متعلق بمقدار طول المستوى ل فيعلم من ذلك حينئذ أن المتحركات التي تخرج جميعا بدون سرعة ابتدائية من نقطة واحدة يكون لها سرعة واحدة عند مجيئها في مستو واحد افقي مهما كانت ميول المستويات التي تتحرك عليها تلك المتحركات

وان كانت السرعة المكتسبة غير متعلقة بميل المستوى ولا بطوله لكن الزمن الذي تستغرقه تلك المتحركات لوصولها الى المستوى الافقي السالف ذكره ليس كذلك كما يتضح ذلك من قانون (٣)

واذا كان للمتحرك سرعة ابتدائية رمزها ع فتلك السرعة تدخل في قانوني (١) (٢) مثل القوانين العمومية السابقة ويتحصل حينئذ بناء على القانونين الجديدين (١) (٣) على مقدار السرعة المكتسبة بعد مسافة حيثما اتفق لَ كما تقدم

تنبيه — حيث ان مدة النزول على مستوى مائل هي

$$ن = \sqrt{\frac{٢ل}{ح جا أ}} = \sqrt{\frac{٢ل}{ح ل جا أ}} = \sqrt{\frac{٢}{ح} \times \frac{لَ}{ر}}$$

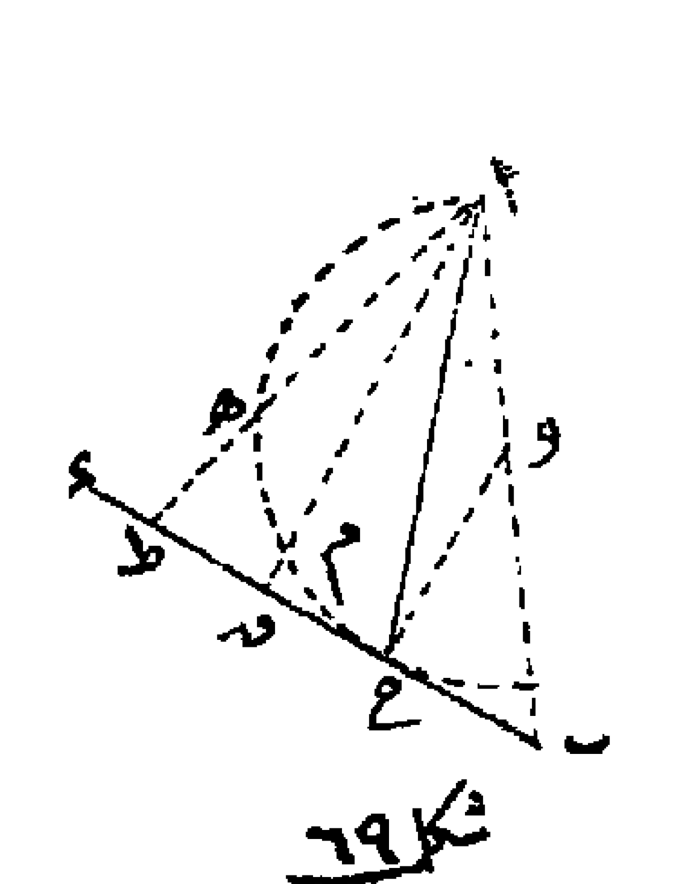
فيشاهد من ذلك ان الزمن ن يكون واحداً لجميع المستويات المائلة التي فيها $\frac{لَ}{ر}$ كمية ثابتة وهذا يحصل بالنسبة لجميع المستويات التي اطوالها ل وميولها عبارة عن ميول الاوتار أب ، أء ، أهـ ، أبَ ، أءَ ، أهـَ ، .... (شكل ٦٨) لكرة أو لدائرة المنتهى جميعها بنهايتي قطر واحد رأسي أأَ لانه اذا انزل من نقطة حيثما اتفق ب من محيط الدائرة عمود ب ك على قطر أأَ = ٢ نق فانه يحدث

$$لَ = ر \times ٢ نق \quad \text{ومنها يحدث} \quad \frac{لَ}{ر} = ٢ نق$$

وهو كمية ثابتة وهو المطلوب

شكل ٦٨

مسئلة — المعلوم مستوى مثل ب ء (شكل ٦٩) والمطلوب تعيين ميل المستوى الذي يقطعه المتحرك الخارج من نقطة أ بدون سرعة ابتدائية ويأتي في مستوى ب ء في زمن أصغر ما يمكن لذلك يكفي تعيين المستقيم الأعظم ميلاً للمستوى المطلوب ولاجل ذلك عند المستقيم الرأسي أب وننزل العمود أهـ على ب ء فالمستقيم أع المنصف لزاوية ب أهـ يكون هو المستقيم الأعظم ميلاً المطلوب



شكل ٦٩

لأنه اذا مد ع و موازياً للمستقيم اهـ أعني عموداً على ب ء ثم جعلت نقطة و مركزاً وبنصف قطر و ع ورسم نصف محيط دائرة فانه يمر بنقطة أ حيث ان كلا من الزاويتين أ ع و ، ع أ و تساوي لزاوية ع أهـ وبناء عليه فيكون المثلث أ ع و متساوي الساقين أعني يكون و ع = و أ اذا تقرر هذا لجميع الاوتار الممتدة من نقطة أ في نصف المحيط المذكور يقطعها المتحرك في زمن مساوٍ للزمن المستعمل لقطع الوتر أ ع بناء على التنبيه السابق ولكن حيث ان المستوى ب ء مماس لنصف المحيط السالف ذكره في نقطة ع فكل نقطة أخرى خلاف نقطة ع تكون خارجة عنه وبناء عليه فالمتحرك لا يمكنه ان يصل الى النقطة الخارجة عن نصف المحيط المذكور الا في ازمنة اكبر من الزمن الذي يستعمله لقطع الوتر أ ع وهو المطلوب

في مقاومة الأوساط

اعلم ان الجسم الذي يتحرك في الماء مثلاً يكابد مقاومة من قبل الوسط المتنقل فيه وحينئذ فيصرف من الشغل المحرك ما يلزم لتحريك عناصر الوسط المذكور

ومقاومة الأوساط تختلف عن الاحتكاك حيث انها تزداد تبعاً للسرعة وللاتساع الجسم المتحرك وهي مناسبة الى ما يأتي

أولا الى كثافة المائع
وثانيا الى القطاع الاكبر للجسم المأخوذ عموديا على اتجاه الحركة
وثالثا الى مربع السرعة
وقد ينتفع بمقاومة الاواسط فى الطبيعة فانه لولا مقاومة الهواء لما طارت الطيور فى الجو ولما انتظمت اصوات دقاقات الساعات الدقاقة وسرعة اسطوانة جهاز مورات السابق الكلام عليه فيما تقدم ولولا مقاومة الماء لما امكن عوم السمك والمراكب فى البحار وهكذا

فى التصادم

عند البحث فى تأثيرات التصادم نفرض أن الاجسام المتصادمة كروية الشكل وتامة الملاسة ومتجانسة بحيث تكون مراكز ثقلها منطبقة على مراكزها الهندسية

معامل المرونة — اعلم ان جميع الأجسام المعلومة لنا قابلة للانضغاط كثيرا أو قليلا وتميل بدرجات مختلفة للرجوع الى شكلها الأصلى متى زالت القوى الضاغطة عليها وهذه الخاصية هى المسماة بالمرونة والقوة الداخلية التى يبذلها الجسم ليعود الى شكله الأصلى تسمى قوة الرد أى رد الفعل وقد علم من التجربة ان نسبة قوة رد الفعل الى قوة الضغط نفسها تكون ثابتة بالنسبة للمادة الواحدة مهما كانت مقادير قوى الضغط الا انها تختلف باختلاف المواد وهذه النسبة يمكن اعتبارها مقياسا لمرونة المادة ولذا تسمى غالبا معامل المرونة

وهذا المعامل لا يمكن فى حال من الأحوال ان يكون أكبر من الواحد والمواد التى فيها المعامل المذكور مساو للواحد تسمى أجساما تامة المرونة والاجسام الاخرى تسمى غير تامة المرونة وكلما كان معامل المرونة أكبر كان الجسم المطابق له أكثر مرونة ويمكن ان يقال انه لا يوجد جسم تام المرونة مطلقا ففى الكرات الصلب يكون معامل المرونة $\frac{5}{9}$ وفى الكرات الزجاج يكون المعامل المذكور $\frac{15}{16}$

تعريف — الخط الواصل بين مراكز الكرات المتصادمة فى لحظة التصادم يسمى خط التصادم ويسمى التصادم مستقيما حينما تكون المراكز متحركة فى اتجاه خط التصادم وفى الاحوال الأخرى يسمى التصادم مائلا

شكل ٧٠

فاذا اصدمت كرة مثل ا كرة أخرى مثل ب شكل ٧٠ تصادما مستقيما فان تأثير الضغط المشترك بينهما ينشأ عنه زيادة سرعة كرة ب ونقص سرعة كرة ا الى ان تتساوى السرعتان وحينئذ ينعدم الضغط المشترك بينهما فاذا كانت الكرتان غير مرنتين فانهما تتحركان باستظام بالسرعة التى وصلتا اليها بعد التصادم وشدة هذا الضغط المشترك تتغير فى اثناء الزمن الصغير الذى تضغط فيه الكرتان بعضهما بعضا الا أنه بالنسبة لتأثيره الذى ينشأ عنه كمية التحرك يعتبر له مقدار متوسط ثابت

ويمكن تقدير مقدار التصادم بكمية التحرك س التى يكتسبها أحد الجسمين ب ويفقدها الآخر ا

مع ملاحظة ان هذين التأثيرين على الكرتين المذكورتين يكونان متساويين في المقدار ومختلفين في الجهة

فاذا كانت الكرتان مرنتين فأن الضغط المشترك بينهما يستمر زمنا بعد تساوي سرعتيهما بسبب ميلهما للرجوع الى شكلهما الأصليين وكمية التحرك التي تكتسبها احد الكرتين وتفقدها الاخرى بعد ذلك التي نرمز اليها بالرمز سَ تكون نسبتها الى كمية التحرك س الحادثة في المدة الاولى من التصادم كنسبة (ى ÷ ١) وهذه النسبة تتعلق بمرونة مادتي الكرتين اعني ان ى رمز لعامل المرونة وعليه يكون

سَ = ى س

وحينئذ فجميع كميات التحرك التي تكتسبها الكرة ب وتفقدها الكرة ٢ تكون مساوية الى

س + سَ = (١ + ى) س

ولا يخفى ان الزمن الحاصلة فيه حادثة التصادم صغير جدا لا يمكن تقديره الا ان الايضاح الذي ذكرناه كاف لتصوره وارتقاء الفكر الى فهم معنى ان التصادم يحصل في زمن صغير جدا

التصادم المستقيم — اذا كانت كرتان غير مرنتين متحركتين بسرعتين معينتين وتصادمتا تصادما مستقيما واريد ايجاد سرعة كل منهما بعد التصادم يقال

نفرض ان ع ، عَ هما سرعتا الكرتين ٢ ، ب (شكل ٧٠) على التناظر قبل التصادم وان حركتهما حاصلتان في الاتجاهين المبينين بالسهمين

وحيث كانت الكرتان غير مرنتين فانهما يتحركان في جهة واحدة بعد التصادم بسرعة مشتركة رمزها عٖ فاذا رمز بالرمز س لكمية التحرك التي تفقدها الكرة ٢ وتكتسبها الكرة ب في مدة التصادم ورمزنا ايضا لجسمي الكرتين ٢ ، ب بالرمزين م ، مَ على التناظر يكون تحرك الكرة ٢ بعد التصادم = كمية حركتها قبل التصادم ناقصا س اعني يكون

م عٖ = م ع − س .... (١) وبالمثل يكون

مَ عٖ = مَ عَ + س .... (٢) وبالجمع يحدث

(م + مَ) عٖ = م ع + مَ عَ .... (٣) ومنها يحدث

$$\text{عٖ} = \frac{\text{م ع + مَ عَ}}{\text{م + مَ}} \quad ....(٤)$$

واذا اوضع عوضا عن عٖ مقدارها في معادلة (١) وهي

س = م (ع − عٖ) يحدث

$$\text{س} = \text{م}\left(\text{ع} - \frac{\text{م ع + مَ عَ}}{\text{م + مَ}}\right) = \frac{\text{م مَ (ع − عَ)}}{\text{م + مَ}} \quad .... (٥)$$

فمن معادلة (٤) تتعين السرعة المشتركة عٖ لكل من الكرتين بعد التصادم ومن معادلة (٥) تتعين كمية التحرك س التي تكتسبها الكرة ب وتفقدها الكرة ٢

وينتج من ذلك اولا انه من معادلة (٣) يرى ان مجموع كميتي تحرك الكرتين بعد التصادم مساو لمجموع كميتي

كميتي التحرك قبل التصادم

وثانيا بناء على معادلات (١)، (٢)، (٥) يمكن ان يوضع

السرعة التي تفقدها ا $= \text{ع} - \text{عٍ} = \frac{\text{س}}{\text{م}} = \frac{\text{مَ}(\text{ع} - \text{عَ})}{\text{م} + \text{مَ}}$

والسرعة التي تكتسبها ب $= \text{عٍَ} - \text{عَ} = \frac{\text{س}}{\text{مَ}} = \frac{\text{م}(\text{ع} - \text{عَ})}{\text{م} + \text{مَ}}$

وهذا الوضع مفيد احياناً

تنبيـــها - اذا كانت كرة ب متحركة في جهة مضادة لجهة حركة ا قبل التصادم فانه يلزم تغيير اشارة عَ في المعادلات السابقة وبعبارة اخرى يمكن اعتبار ع، عَ هما سرعتا ا، ب جبريا على التناظر وتعتبر اشارتها في كل حالة من الاحوال حسب اتجاه التحرك الحقيقي ويجب ملاحظة ذلك فيما سيأتي

وثالثا اذا تصادمت الكرة ا مع الكرة ب وهي ساكنة فيكفي ان يوضع في المعادلات السابقة عَ = ٠

فاذا كانت الكرتان ا، ب المذكورتان (شكل ٧) غير تامتي المرونة واريد ايجاد سرعة كل منهما بعد التصادم يقال

نفرض ان ع، عٍ سرعتا ا قبل التصادم وبعده وان عَ، عٍَ سرعتا ب قبل التصادم وبعده أيضا ونفرض ان الكرة ا هي التي تصدم كرة ب ونرمز بالرمز س لكمية التحرك التي تفقدها الاولى وتكتسبها الثانية في المدة الاولى من التصادم أي قبل تساوي سرعتي الكرتين بسبب الانضغاط ثم نرمز بالرمز سَ لكمية التحرك الناتجة من رد الفعل بعد تساوي سرعتي الكرتين الذي يحدث انفصال الكرتين المذكورتين عن بعضهما

وحينئذ من بعد ملاحظة ان معامل المرونة هو ى فبموجب ما تقدم يكون

$$\text{سَ} = \text{ى}\,\text{س} \quad \text{ويكون}$$

$\text{س} + \text{سَ} = (١ + \text{ى})\,\text{س}$ هو كمية التحرك الكلية التي تفقدها ا وتكتسبها ب وحينئذ يكون

$$\left.\begin{aligned} \text{م}\,\text{عٍ} &= \text{م}\,\text{ع} - (١ + \text{ى})\,\text{س} \\ \text{مَ}\,\text{عٍَ} &= \text{مَ}\,\text{عَ} + (١ + \text{ى})\,\text{س} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (١)$$

وحيث ان س هي كمية التحرك الناتجة من تضاغط الكرتين قبل ابتداء قوة مرونتهما في التأثير فيكون مقدارها كما لو كانت الكرتان غير مرنتين وحينئذ بموجب ما تقدم يكون

$$\text{س} = \frac{\text{م}\,\text{مَ}\,(\text{ع} - \text{عَ})}{\text{م} + \text{مَ}}$$

واذا وضع عوضا عن س مقدارها في معادلتي (١) يحدث

$$\left.\begin{aligned} \text{عٍ} &= \text{ع} - (١ + \text{ى})\frac{\text{س}}{\text{م}} = \text{ع} - (١ + \text{ى})\frac{\text{مَ}(\text{ع} - \text{عَ})}{\text{م} + \text{مَ}} \\ \text{عٍَ} &= \text{عَ} + (١ + \text{ى})\frac{\text{س}}{\text{مَ}} = \text{عَ} + (١ + \text{ى})\frac{\text{م}(\text{ع} - \text{عَ})}{\text{م} + \text{مَ}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (٢)$$

ومن هاتين المعادلتين يمكن تعيين سرعتي ا ، ب بعد التصادم

وينتج من ذلك أولاً أنه بجمع معادلتي (١) الى بعضهما طرفاً بطرف يحدث

$$م\,عٓ + مَ\,عٓ = م\,ع + مَ\,عَ$$

أعني ان مجموع كميتي التحرك بعد التصادم لا يتغير بتأثير التصادم

وثانياً يمكن وضع معادلتي (٢) بالصورة الآتية

$$\left.\begin{array}{l} \text{السرعة التي تفقدها ا} = ع - عٓ = [١ + ى]\,\dfrac{مَ(ع - عَ)}{م + مَ} \\ \text{والسرعة التي تكتسبها ب} = عٓ - عَ = (١ + ى)\,\dfrac{م(ع - عَ)}{م + مَ} \end{array}\right\} \ldots\ldots (٣)$$

وكذا بطرح معادلتي (٢) من بعضهما يحدث

$$عٓ - عٓ = عَ - ع + (١ + ى)(ع - عَ) = ى(ع - عَ) \ldots [٤]$$

ومن هذه المعادلة يكون

$$\frac{عٓ - عٓ}{ع - عَ} = \frac{ى}{١}$$

اعني ان النسبة بين السرعتين النسبيتين للكرتين بعد التصادم وقبله كالنسبة بين معامل المرونة والوحدة

وثالثاً اذا صدمت الكرة ا كرة ب وهي ساكنة فيكفي ان يوضع في المعادلات السابقة $عَ = ٠$.

وقد حل مسألة التصادم المستقيم المذكور لكرتين غير تامتي المرونة على اعتبار اولاً أن مجموع كميتي التحرك بعد التصادم وقبل التصادم واحد وذلك بناء على ان الفعل ورد الفعل متساويان في المقدار ومختلفان في الجهة

وثانياً ان النسبة بين السرعتين النسبيتين للكرتين بعد التصادم وقبله ثابتة وهي كنسبة ى : ١

، ى هو معامل المرونة وذلك بناء على ما حققته التجربة

فعلى هذين الاعتبارين واتباع الرموز السابقة يكون

$$\left\{\begin{array}{l} م\,عٓ + مَ\,عٓ = م\,ع + مَ\,عَ \\ عٓ - عٓ = ى(ع - عَ) \end{array}\right.$$

ومن هاتين المعادلتين تحصل معادلتا (٢) السابقة أو يحصل على مقداري عٓ ، عٓ كما هو آت

$$\left\{\begin{array}{l} عٓ = \dfrac{م\,ع + مَ\,عَ}{م + مَ} - ى \times \dfrac{مَ(ع - عَ)}{م + مَ} \\ عٓ = \dfrac{م\,ع + مَ\,عَ}{م + مَ} + ى \times \dfrac{م(ع - عَ)}{م + مَ} \end{array}\right.$$

تنبيه — الأصوب اتباع حل المسألة المذكورة بالطريقة السابقة التي وجدت بحسبها المعادلات (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) حيث انها مؤسسة على قواعد سهلة الفهم وبسيطة

التصادم المائل — اذا كانت كرتان ناعمتان غير تامتي المرونة متحركتين في مستو واحد بسرعتين معينتين وفي اتجاهين معينين وتصادمتا تصادماً مائلاً واريد ايجاد حركة كل منهما بعد التصادم يقال

نفرض

نفرض ان وس شكل ٧١ هو المستقيم المار بمركزى الكرتين وقت التصادم وان الأسهم الموضحة فى الشكل دالة على الاتجاهات التى تتحرك عليها الكرتان قبل التصادم وبعده

ثم نفرض أن ع ، عَ هما سرعتا الكرة ا قبل التصادم وبعده فى اتجاهين صانعين زاويتى ى ، ىَ مع الخط وس وأن عَ ، عً ، هـ ، هَ هى الكميات المماثلة للكميات السابقة بالنسبة للكرة ب

شكل ٧١

ومن حيث ان الكرتين ناعمتان فالضغط المشترك لهما يحصل فى اتجاه وس وحينئذ فنقدر سرعتا الكرتين المذكورتين فى اتجاه وس وفى الاتجاه العمودى عليه ثم يبحث عن تحرك الكرتين كل على حدته

وحينئذ يقال حيث انه لا توجد قوى مؤثرة على الكرتين فى اتجاه عمودى على وس فان سرع هاتين الكرتين على الاتجاه المذكور لا تتغير بتأثير التصادم ويكون

عً حا ىَ = ع حا ى .... (١)

عً حا هَ = عَ حا هـ .... (٢)

وكذا حيث ان تأثير التصادم على محللات السرع فى اتجاه وس يكون حاصلا كما لو كانت هذه المحللات موجودة بنفسها فتكون

ع حا ى ، عً حا ىَ } ، عَ حا هـ ، عَ حا هَ } هى محللات السرع ا ، ب على اتجاه وس { قبل ، وبعد } التصادم

فاذا كان ﺑ رمز الكمية التحرك الكلية التى تكتسبها الكرة ب وتفقدها الكرة ا وقت التصادم فبموجب ما تقدم يكون

$$ﺑ = \frac{(١+ى) م مَ (ع حا ى - عَ حا هـ)}{م + مَ}$$

ويكون أيضا

$$عً \ حا ىَ = ع \ حا ى - (١+ى) \frac{مَ}{م+مَ} (ع \ حا ى - عَ \ حا هـ) \ .... (٣)$$

$$عً \ حا هَ = عَ \ حا هـ + (١+ى) \frac{م}{م+مَ} (ع \ حا ى - عَ \ حا هـ) \ .... (٤)$$

فالمعادلتان (١) ، (٣) تكفيان لتعيين عً ، ىَ والمعادلتان (٢) ، (٤) تكفيان لتعيين عً ، هَ وهذه الاربع مقادير تكفى لتعيين سرعتى الكرتين بعد التصادم مقدارا واتجاها

تنبيه — ما ذكر بخصوص التصادم المائل يدل بوجه العموم على حل مسألة تصادم كرتين متحركتين فى مستو واحد ويمكن استخراج كل حالة خصوصية منها باعطاء الرموز مقاديرها الخاصة بها حالا

نلاحظ هنا الحالة المهمة الآتية وهي
انه اذا اصدمت كرة ا بالميل كرة ب الساكنة والكبيرة جدا يكون

$$\bar{\text{ع}} = 0 \ ،\ \frac{\text{م}}{\text{م} + \bar{\text{م}}} = 0 \ ،\ \frac{\bar{\text{م}}}{\text{م} + \bar{\text{م}}} = 1 \ \text{تقريبا ويكون}$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{\text{ع}}_2 \,\text{جا}\,\bar{\text{ء}} &= \text{ع}\,\text{جا}\,\text{ء} \\ \bar{\text{ع}}_2 \,\text{جتا}\,\bar{\text{ء}} &= -\text{ى}\,\text{ع}\,\text{جتا}\,\text{ء} \end{aligned}\right\} \text{ومن هاتين المعادلتين نستخرج } \bar{\text{ع}}_2 \text{ ، } \bar{\text{ء}}$$

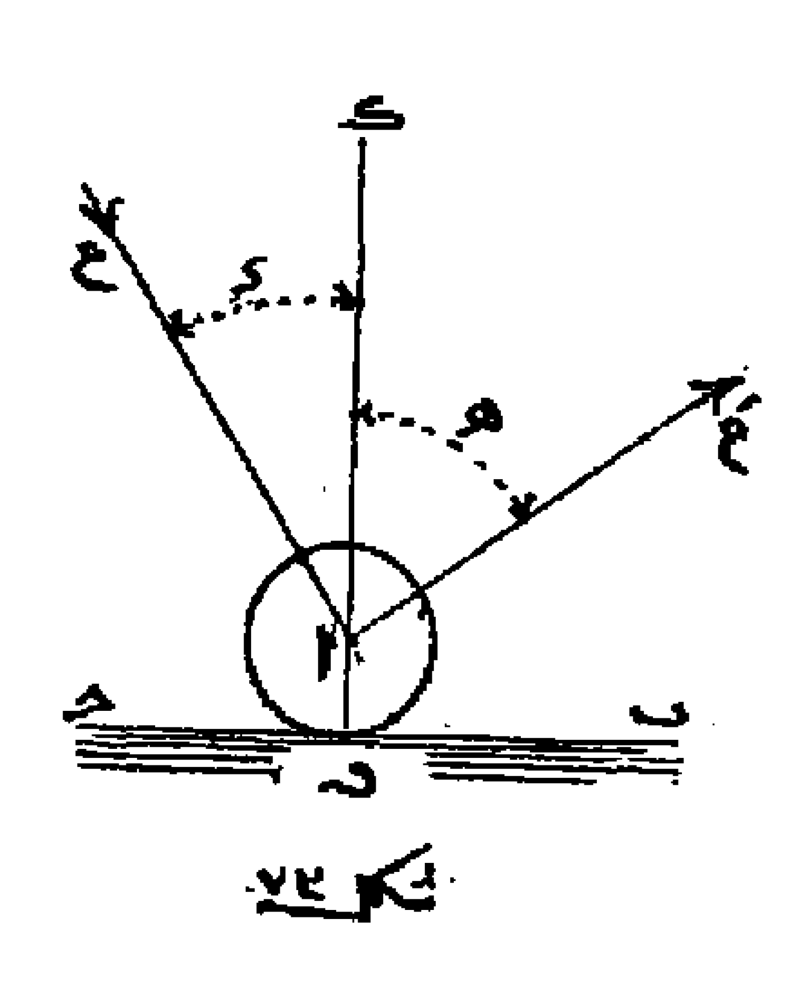
$$\bar{\text{ع}}_2 = 0 \ \text{تقريبا}$$

ويرى من ذلك ان كمية التحرك التي نقلت الى ب غير محسوسة وحيث ان طتا $\bar{\text{ء}} = -$ ى طتا ء
فيلزم ان يكون $\bar{\text{ء}} > 90°$
وحينئذ فكرة ا تنعكس بعد التصادم كما في شكل ٧٢
وحالة تصادم كرة بمستو ثابت هي حالة من هذا القبيل وكذلك اذا اصدمت الأرض كرة في حيث ان جسم الأرض كبير جدا بالنسبة لجسم الكرة فأن كمية التحرك التي تكسبها الأرض من الكرة المذكورة تكون غير محسوسة

شكل ٧٢

ملحوظة — اذا تصادمت كرتان ولم تتحركا في مستو واحد فلأجل ايجاد حركة كل من الكرتين بعد التصادم يلزم استعمال الطرق التي استعملناها في حالة التصادم المائل السابق ذكره اى اننا نحلل سرعتي كل من الكرتين على اتجاهي خط التصادم والخط العمودي عليه وحينئذ فالمحلات العمودية للسرع لا تتأثر بالتصادم واما محلات السرع في اتجاه خط التصادم فتتغير كما لو كانت موجودة بنفسها اما معادلات الحل العمومي لهذه المسألة فتتوقف على اصول الهندسة التحليلية ذات الثلاثة ابعاد ولا لزوم لذكرها هنا

التصادم على مستو — اذا اصدمت كرة مثل ا شكل ٧٣ لا مستويا ناعما مثل ب ح بالميل وأريد ايجاد حركة الكرة المذكورة بعد التصادم يقال



شكل ٧٣

ليكن د ك رأسي المستوى المذكور في نقطة تماسه بالكرة ا وقت الانصدام ولنفرض ان ذلك الرأسي موجود في مستوى الشكل وان المستقيم المتحركة عليه الكرة ا قبل التصادم في مستوى الشكل ايضا وأن هذا المستوى يقطع المستوى المفروض في المستقيم ح د ب وحينئذ فخط حركة الكرة ا بعد التصادم يكون في نفس مستوى الشكل حيث انه لا تؤثر قوة ما على الكرة اثناء التصادم في اتجاه عمودي على هذا المستوى

وليكن

ولیکن ع ، عَ سرعتی الكرة ا قبل التصادم وبعده ، ى ، هـ زاويتي ميلها على الخط الرأسى د ك ، م جسم الكرة المذكورة ، ى معامل المرونة ، س كمية التحرك المفقودة بسبب الانضغاط فى المدة الأولى من التصادم

فمن حيث ان السرعة الموازية الى د ب غير متأثرة بالتصادم يكون

عَ حا هـ = ع حا ى .... (١)

وحيث ان كمية تحرك الكرة ا على الخط الرأسى ك د معدومة بتمامها بمقاومة المستوى فيكون

س = م ع حتا ى

، ى س الذى هو مقدار كمية التحرك المكتسبة من الاتجاه المضاد بسبب المرونة أو قوة رد الفعل يكون مقداره هو

ى س = م عَ حتا هـ   وإذن يكون

عَ حتا هـ = ى ع حتا ى .... (٢)

ومن معادلتي (١) ، (٢) يحدث

ظتا هـ = ى ظتا ى
عَ = ع √(حا٢ ى + ى٢ حتا٢ ى) .... (٣)

ومن معادلتي (٣) يتعين مقدار السرعة واتجاهها بعد الانصدام

وينتج من ذلك أولا انه اذا كانت الكرة غير مرنة يكون ى = ٠ ، هـ = ٩٠° ، عَ = ع حا ى

أعني انه اذا صدمت كرة غير مرنة مستويا ثابتا بالميل فأنها تسير بعد الانصدام متدحرجة عليه بسرعة مساوية الى ع حا ى

وثانيا يكون مقدار قوة الدفع التى يحملها المستوى مساويا الى

م (ع حتا ى + عَ حتا هـ) = (١ + ى) م ع حتا ى

حركة مركز الثقل بعد التصادم ـ اذا كان المطلوب معرفة سرعة مركز ثقل كرتين متحركتين بانتظام بعد التصادم يقال

ننسب وضعي الكرتين وحركتهما الى محورين متعامدين و س ، و ص شكل ٧٤ موجودين فى مستوى الحركة ولكن هو مستوى الشكل

ونفرض أن ا ، ب هما وضعا مركزى الكرتين فى مبدأ الامر وأن اَ ، بَ هما وضعا مركزيهما بعد الزمن ز وأن ا ، ب هما احداثيا ا ، ب بالنسبة لمحور و س فى مبدأ الزمن ز وأن س ، سَ هما احداثيا اَ ، بَ بعد الزمن ز

شكل ٧٤

وان ع ، عَ هما محللتا سرعتي ا ، ب على الاتجاه وس وهاتان المحللتان تكونان ثابتتين حيث أن الحركتين منتظمتان بالفرض وحينئذ يكون

$$\left.\begin{array}{l} س = ا + ع ز \\ سَ = ب + عَ ز \end{array}\right\} \ldots\ldots (١)$$

واذا فرض ان س ، سً هما احداثيا مركز الثقل هـ للكرتين في الوضع الابتدائي وبعد الزمن ز بالنسبة للمحور وس ورمزنا لجسمي الكرتين ا ، ب المذكورتين بالرمزين م ، مَ على التناظر يكون

$$\left.\begin{array}{l} (م + مَ)\ سً = م ا + مَ ب \\ (م + مَ)\ سًَ = م س + مَ سَ \end{array}\right\} \ldots\ldots (٢)$$

وبالطرح يحدث

$$(م + مَ)(سًَ - سً) = م(س - ا) + مَ(سَ - ب) = (م ع + مَ عَ)\ ز \quad \text{واذن يكون}$$

$$سًَ - سً = \frac{(م ع + مَ عَ)\ ز}{م + مَ} \ldots (٣)$$

وحيث أن سًَ - سً عبارة عن المسافة التي يقطعها مركز الثقل هـ بالتوازي لمحور السينات وس وأن هذه المسافة تتغير بالنسبة للزمن ز فتكون سرعة مركز الثقل هـ بالتوازي لمحور وس ثابتة وحينئذ اذا رمز لها بالرمز عً يكون $عً = \frac{م ع + مَ عَ}{م + مَ}$

وبمثل ذلك اذا كان عِ ، عَِ ، عًِ هي سرع ا ، ب ، هـ بالتوازي لمحور وص يكون

$$عًِ = \frac{م عِ + مَ عِ َ}{م + مَ}$$

وحيث علمت سرعتا عً ، عًِ فتعلم حركة مركز الثقل هـ

وينتج من ذلك أولا أنه اذا كان هناك ثلاث كرات أو اكثر فبناء على الطريقة السابقة يكون

$$عً = \frac{م ع + مَ عَ + مً عً + \ldots\ldots}{م + مَ + مً + \ldots\ldots} = \frac{مج م ع}{مج م} \text{ ،}$$

$$عًِ = \frac{م عِ + مَ عِ َ + مً عًِ + \ldots\ldots}{م + مَ + مً + \ldots\ldots} = \frac{مج م عِ}{مج م}$$

واذا لم تكن الحركة في مستو واحد واعتبرنا محورا ثالثا عموديا على المحورين وس ، وص ولكن وع ورمزنا لسرعة مركز الثقل بالتوازي للمحور المذكور بالرمز عًُ ولسرع الكرات بالتوازي له أيضا بالرموز عُ ، عُ َ ، عًُ ، ...... يكون

$$عًُ = \frac{م عُ + مَ عُ َ + مً عًُ + \ldots\ldots}{م + مَ + مً + \ldots\ldots} = \frac{مج م عُ}{مج م}$$

ويفهم من ذلك ان سرعة مركز ثقل جملة اجسام بالتوازي لاتجاه معلوم تساوي مجموع كميات تحرك كل منها بالنسبة للاتجاه المذكور مقسوما على جسم الجملة بتمامها

وبعبارة أخرى أنه اذا كانت حركة الأجسام بالتوازي لاتجاه معين منتظم فأن سرعة مركز ثقل الجملة المادية

في

فى الاتجاه المذكور تكون حاصلة كما اذا كانت جميع كمية تحرك الجملة المنسوبة للاتجاه المعلوم مساوية لكمية تحرك جسم واحد جسم مساو لجسم الجملة ومتحد مع الجملة المذكورة فى مركز الثقل ومتحرك بسرعة مركز الثقل المذكور

تنبيـــه - يمكن تعيين عجلة مركز الثقل من معادلات علي المعادلات السابقة وانما نعوض فيها سرع الأجسام المختلفة بالعجلات

وثانيا حيث انه اذا اضفنا سرعا متساوية الى سرعة كل من الأجسام المذكورة فأن الحركة النسبية للجملة لا تتغير فحينئذ اذا أريد ان يكون مركز ثقل الجملة المادية ساكنا باضافة سرعتين مساويتين الى $-ع_٣$ ، $-عَ_٣$ لسرعة كل كرة من الجملة المادية فكمية التحرك اللازم ادخالها لكل من الكرتين ا ، ب بناء على هذا الغرض تكون هى $-م ع_٣$ ، $-مَ عَ_٣$ أو $-م \times \frac{م ع + مَ عَ}{م + مَ}$ ، $-مَ \times \frac{م ع + مَ عَ}{م + مَ}$ بالتوازى للمحور وس ، $-م عٖ_٣$ ، $-مَ عٖ_٣$ بالتوازى للمحور وص

نظريه - اذا تصادمت كرتان ناعمتان فأن حركة مركز الثقل لا تتغير بتأثير التصادم

لأنه اذا فرض أولا ان الكرتين متحركتان فى اتجاه خط التصادم رس شكل ٧٤ أعنى ان التصادم مستقيم وفرض ان

$$\left.\begin{matrix} ع \text{ ، } عَ \\ اَعَ \text{ ، } اعَ \end{matrix}\right\} \text{سرعتا } ا \text{ ، } ب \text{ قبل التصادم وبعده فيكون}$$

$$ع_٣ = \frac{م ع + مَ عَ}{م + مَ} \text{ ، } ع_٤ = \frac{م اع + مَ اعَ}{م + مَ}$$

وحيث ان كمية التحرك بعد التصادم تساوى كمية التحرك قبله بموجب ما تقدم فيكون

$$ع_٣ = ع_٤$$

ثانيا اذا كان التصادم مائلا

فتحلل سرعتى الكرتين فى اتجاهين احدهما خط التصادم والآخر عمودى عليه وبناء على النتيجة الأولى لا تتغير محللة سرعة حركة مركز الثقل فى اتجاه خط التصادم بتأثير التصادم وحيث ان محللة سرعة كل من الكرتين فى اتجاه عمودى على اتجاه خط التصادم لا يتغير بتأثير التصادم فلا تتغير محللة سرعة مركز الثقل فى هذا الاتجاه أيضا وعليه فيثبت ان سرعة مركز ثقل الكرتين لا تتغير مقدارا ولا اتجاها بتأثير التصادم

تنبيــه - يمكن بدون صعوبة تعميم النظرية المذكورة على الحالة التى فيها توجد جملة كرات وبيان أن حركة مركز ثقل عدد ما من الكرات الملسا لا تتغير بتصادم كرتين أو اكثر من الجملة المذكورة

(مســائل)

المسألة الاولى - كرة ثقلها ٤ ارطال متحركة من اليمين الى اليسار بسرعة قدرها ٨ ياردات فى الثانية صدمت تصادما مستقيما كرة اخرى ثقلها ١٠ ارطال متحركة فى نفس الجهة بسرعة قدرها ٢ يارده فى الثانية

والمطلوب تعيين الحركة بعد التصادم

لذلك يقال اولا اذا لم تكن الكرتان مرنتين فمن حيث ان اثقال الكرات مناسبة لجسماتها فيمكن اعتبار العددين ٤ و١٠ مبينين لجسمي الكرتين ويحدث

$$\text{السرعة المشتركة بعد التصادم} = ع_٢ = \frac{م ع + مَ عَ}{م + مَ} = \frac{٤ \times ٨ + ٢ \times ١٠}{٤ + ١٠} = \frac{٥٢}{١٤} = ٣\frac{٥}{٧} \text{ ياردة في الثانية}$$

$$، \quad س = \frac{م مَ (ع - عَ)}{م + مَ} = \frac{٤ \times ١٠ (٨ - ٢)}{٤ + ١٠} = \frac{٢٤٠}{١٤} = ١٧\frac{١}{٧}$$

يعني ان الضغط المشترك بين الكرتين يحدث سرعة قدرها $١٧\frac{١}{٧}$ ياردة في الثانية لجسم ثقله رطل واحد

وثانيا اذا كانت الكرتان مرنتين فبموجب ما تقدم يكون

$$\text{سرعة ا بعد التصادم} = ع_٢ = ٨ - \frac{(١+ى) \times ١٠ \times (٨-٢)}{٤+١٠} = \frac{٢٦}{٧} - \frac{٣٠}{٧} \times ى$$

$$\text{وسرعة ب بعد التصادم} = عَ_٢ = ٢ + \frac{(١+ى) \times ٤ \times (٨-٢)}{٤+١٠} = \frac{٢٦}{٧} + \frac{١٢}{٧} ى$$

$$، \quad سَ = ١٧\frac{١}{٧} (١+ى)$$

فاذا كان $ى = \frac{١٣}{١٥}$ فالكرة ا تكون ساكنة بعد التصادم وعلى حسب كون $ى < \text{(أو)} > \frac{١٣}{١٥}$ فان ا يتبع ب بسرعة أقل من سرعتها قبل التصادم أو تنعكس ثانيا وتتحرك في جهة مضادة للأولى

المسألة الثانية ــ كرة ا متحركة بسرعة معلومة صدمت تصادما مستقيما كرة ب الساكنة ثم ان كرة ب صدمت تصادما مستقيما كرة حـ الساكنة والمطلوب ايجاد سرعة الكرة حـ

لذلك يقال انه بناء على ما تقدم تكون سرعة ب بعد التصادم الأول هي

$$عَ_٢ = \frac{(١+ى) م}{م + مَ} \times ع \quad \text{وسرعة حـ بعد التصادم الثاني هي}$$

$$عً_٢ = \frac{(١+ى) مَ}{مَ + مً} \times عَ_٢ = \frac{(١+ى)^٢ م مَ}{(م+مَ)(مَ+مً)} \times ع$$

وينتج من ذلك ان السرعة التي تأخذها حـ بتوسط ب تتغير على حسب جسم ب وتكون نهاية عظمى حينما يكون $\frac{مَ}{(م+مَ)(مَ+مً)}$ اكبر ما يمكن اعني حينما يكون $\frac{(م+مَ)(مَ+مً)}{مَ}$ أصغر ما يمكن وحيث انه يمكن كتابة المقدار المذكور بالصورة

$$\left(\sqrt{مَ} - \sqrt{\frac{م مً}{مَ}}\right)^٢ + \left(\sqrt{م} + \sqrt{مً}\right)^٢$$

وان هذا المقدار يكون اصغر ما يمكن حينما يكون $مَ = \sqrt{م مً}$ أي حينما يكون $مَ$ وسطا متناسبا بين $م$ ، $مً$ فحينئذ يكون مقدار $عً_٢$ نهاية عظمى حينما يكون $مَ$ وسطا متناسبا بين $م$ ، $مً$

المسألة الثالثة ــ نقطة مادية قذفت من نقطة معينة هـ شكل ٧٥ بحيث تمر من نقطة أخرى معلومة ك بعد انعكاسها على مستو ثابت معلوم والمطلوب ايجاد اتجاه خط التصادم

لذلك نفرض ان ء هي نقطة انصدام النقطة المادية بالمستوى المفروض فحينئذ يكون المستوى هـ ء ك عموديا على المستوى الثابت المذكور ويقطعه في مستقيم اب

وحيث ان النقطة المادية قذفت في اتجاه هـ ء وانعكست على اتجاه ء ك فبناء على ما تقدم في التصادم

على

على مستو يكون

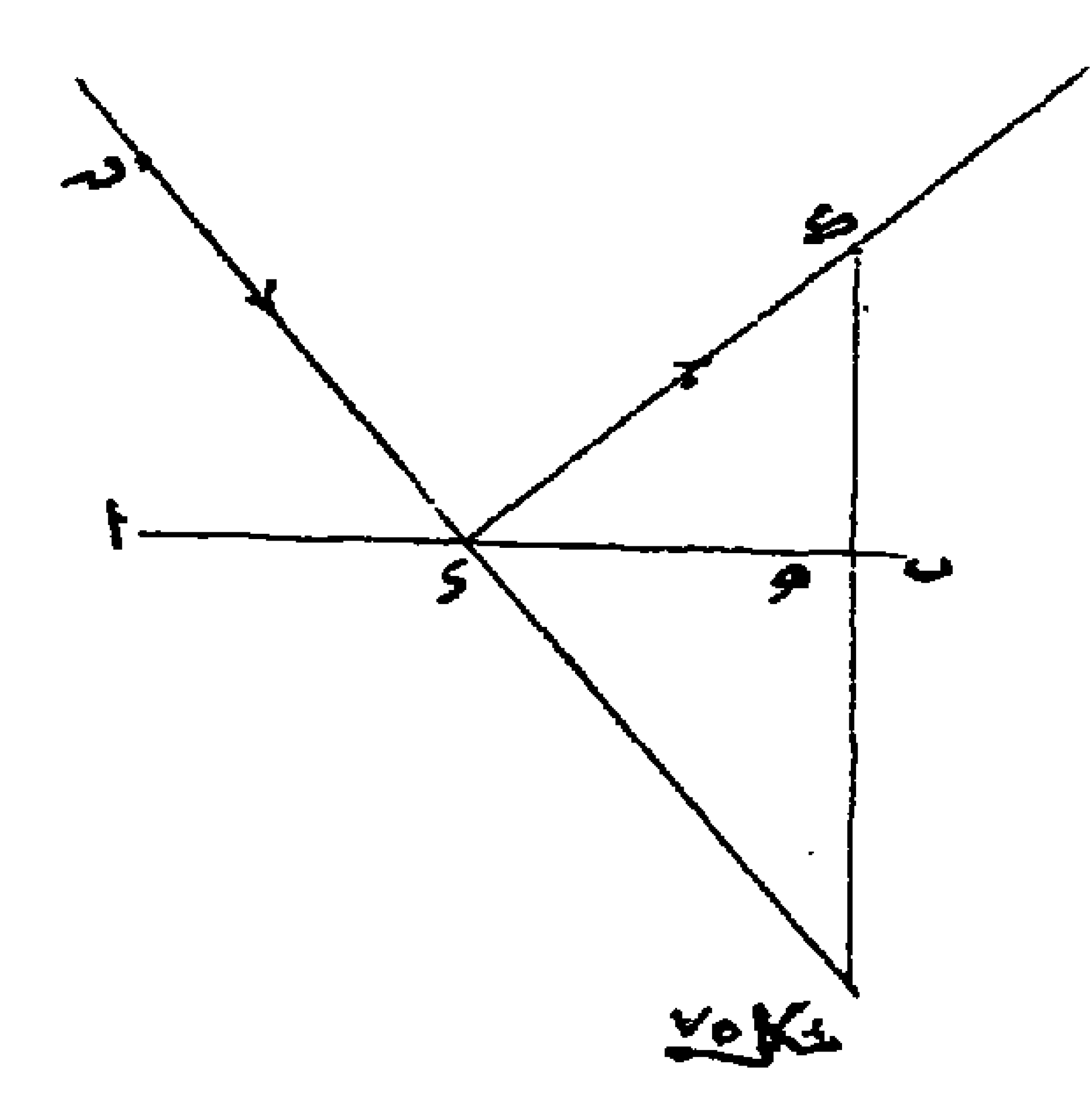
طاك ء هـ = ى طا ه ء ؟ ......(١)

فاذا انزل ك هـ عموديا على اب ومد هـ ء حتى يقطع

امتداد ك هـ فى نقطة و يكون

طاك ء هـ = ى طا و ء هـ وعليه يكون

ك هـ = ى × هـ و



شكل ٧٥

ومن ذلك تتضح طريقة بسيطة لتعيين نقطة ء وهى

أن نرسم ك هـ عموديا على اب ونمده على استقامته

ونأخذ عليه بعد هـ و = $\frac{1}{ى}$ × ك هـ ثم نصل هـ و

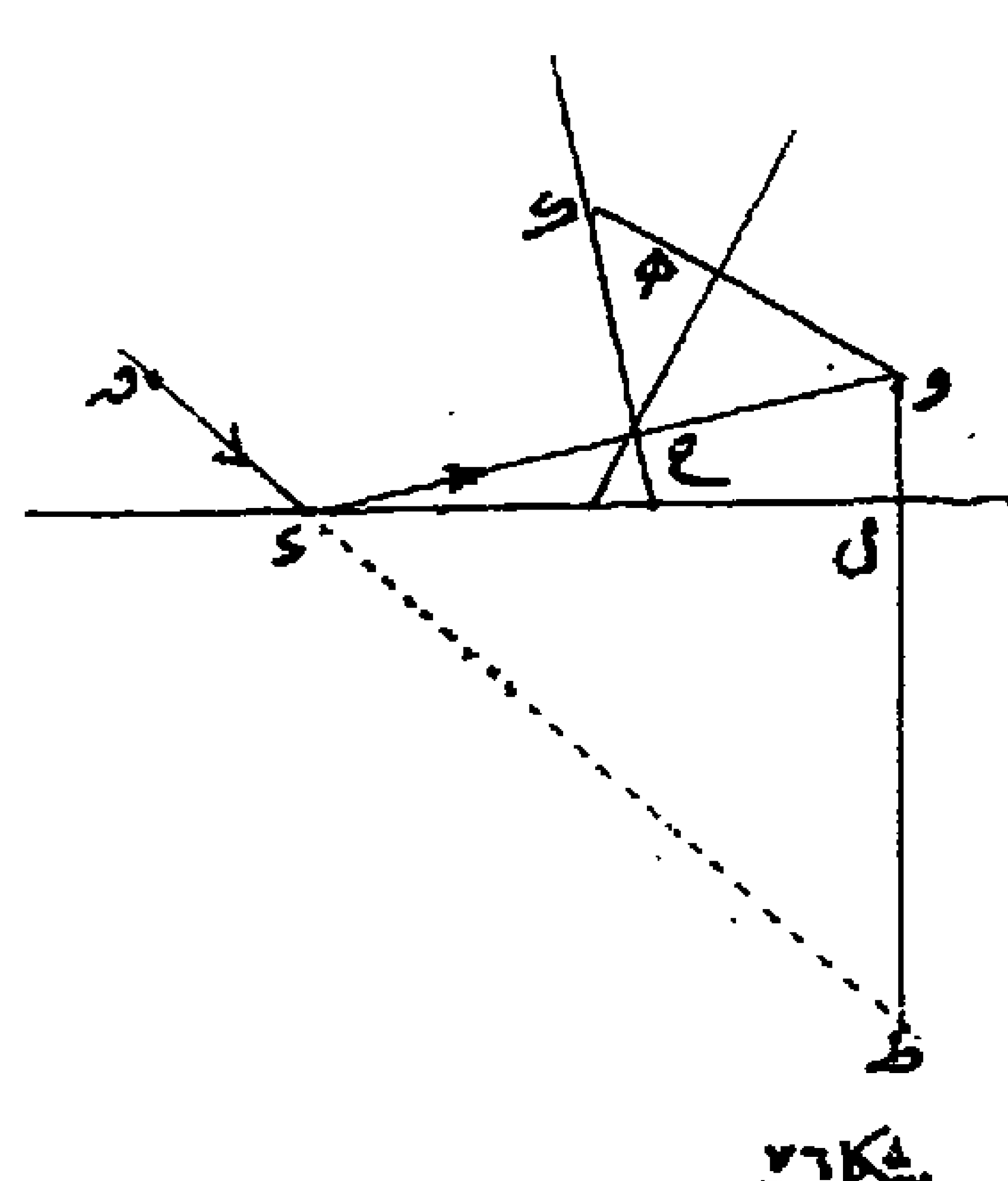
فيقطع اب فى نقطة ء فيكون هـ ء هو الاتجاه المطلوب

وينتج من ذلك انه اذا مرت النقطة المادية من نقطة ك بعد انصدامها على مستويين ء ل ، ع هـ على التوالى

شكل ٧٦ فتحل المسألة بالطريقة الآتية وهى

ان يرسم ك هـ و عموديا على المستوى الثانى ع هـ ويجعل

هـ و = $\frac{1}{ى}$ × ك هـ



شكل ٧٦

ثم يرسم و ل ط عموديا على المستوى الأول ء ل ويجعل

ل ط = $\frac{1}{ى}$ × ل و

ونصل هـ ط فيقطع المستوى الأول فى نقطة ء فنصل ء و

فيقطع المستوى الثانى فى نقطة ع وحينئذ اذا قذفت النقطة

المادية فى اتجاه هـ ء فانها تنعكس على اتجاه ء ع ومن ع

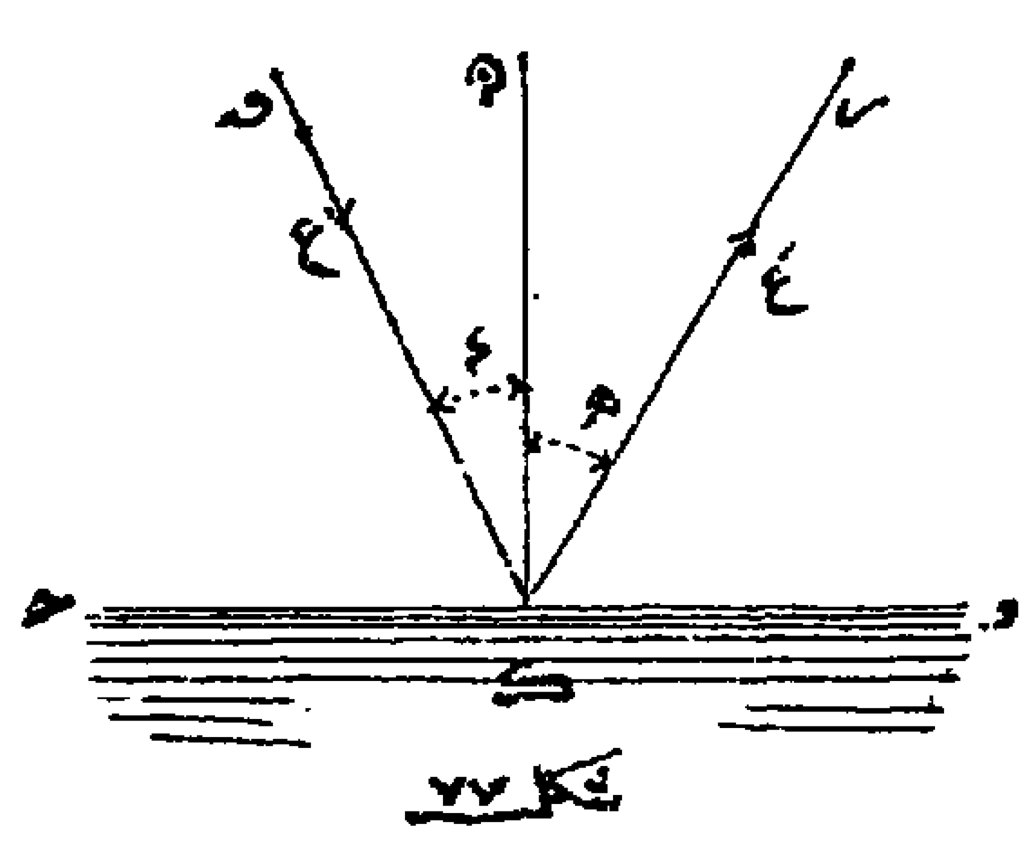
تنعكس ثانيا على اتجاه ع ك وتمر بالنقطة ك

المسألة الرابعة ـ نقطة مادية صدمت مستويا خشنا

ثابتا والمطلوب ايجاد حركتها بعد التصادم

لذلك نفرض ان مستوى الشكل هو مستوى التصادم اى المستوى المشتمل على اتجاه الحركة قبل التصادم وعلى

المستقيم العمودى على المستوى الثابت فى نقطة التصادم



شكل ٧٧

ونفرض ان ع ، عَ شكل ٧٧ هما سرعتا النقطة المادية التى

بجسمها م قبل التصادم وبعده وان ء ، هـ هما زاويتا ميلها

على المستقيم العمودى على المستوى قبل التصادم وبعده

وان س ، ف هما كميتا الحركة الكليتان الناشئتان عن

المستوى الثابت للنقطة المادية فى الاتجاهين ك م ، ك حـ

مع ملاحظة ان كمية التحرك الثانية ناشئة عن خشونة المستوى
وحينئذ اذا حللنا الحركة على اتجاهى ى ى ا ح و فأنه بناء على ما تقدم فى التصادم على مستو يكون

$$ع َ حا هـ = ى ع حا ى \quad \ldots\ldots\ldots (١)$$

ويكون مقدار كمية التحرك الكلية س هو

$$س = (١+ى) م ع حا ى \quad \ldots\ldots\ldots (٢)$$

ويكون أيضا

$$م ع َ حا هـ = م ع حا ى - ف \quad \ldots\ldots (٣)$$

فاذا جعلنا ف = ﻫ س التى فيها ﻫ معامل يتعلق بخشونة المستوى ومقداره الرقمى يتعين بالتجربة ويسمى أحيانا معامل الاحتكاك الديناميكى فتكون اربع معادلات ينتج منها المعادلتان الآتيتان

$$ع َ حا هـ = ى ع حا ى$$

$$ع َ حا هـ = ع حا ى - ﻫ (١+ى) ع حا ى$$

ومن هاتين المعادلتين يتعين مقدارا ع َ ، هـ أعنى سرعة التحرك واتجاهه بعد التصادم

الشغل المفقود بتأثير تصادم الأجسام

أولا حالة الأجسام الرخوة - اعلم ان التغير الحاصل فى شكل الاشكال من تأثير الانضغاط يحدث فقدا من القوى الحية مبتلعا بالقوى العنصرية وسنعين الفقد المذكور الذى نصفه المساوى للقدرة الحية يدل على الشغل المفقود من بعد ملاحظة ان القوى الحية عبارة عن نصف القدرة الحية فنقول

نظرية كارنو - مجموع مفاقيد القوى الحية يساوى حاصل جمع القوى الحية المطابقة للسرع المكتسبة أو المفقودة للأجسام المتصادمة

فأولا اذا كان الجسمان سائرين فى جهة واحدة فان القوى الحية المحصلة قبل الانضغاط تكون $م ع^٢ + م َ ع َ^٢$ وأن القوى الحية المحصلة بعد الانضغاط تكون $(م + م َ) ع_١^٢$ وعليه فتكون مفاقيد القوى الحية مساوية الى $م ع^٢ + م َ ع َ^٢ - (م + م َ) ع_١^٢$ وبناء على منطوق النظرية تكون المفاقيد المذكورة مساوية الى $م (ع - ع_١)^٢ + م َ (ع_١ - ع َ)^٢$ أعنى يكون

$$م ع^٢ + م َ ع َ^٢ - (م + م َ) ع_١^٢ = م (ع - ع_١)^٢ + م َ (ع_١ - ع َ)^٢$$

وللبرهان على ذلك نعوض ع ١ بمقدارها وهو $\frac{م ع + م َ ع َ}{م + م َ}$ فى كل من طرفى المعادلة المذكورة وحينئذ يحدث

$$م ع^٢ + م َ ع َ^٢ - (م + م َ) \left(\frac{م ع + م َ ع َ}{م + م َ}\right)^٢ = م \left(ع - \frac{م ع + م َ ع َ}{م + م َ}\right)^٢ + م َ \left(\frac{م ع + م َ ع َ}{م + م َ} - ع َ\right)^٢$$

ولاجل تحليل هذه المعادلة ومعرفة تساوى طرفيها نأخذ كل طرف على حدته ونحلله فالطرف الأول يؤول من بعد تحويله الى مقام مشترك وأخذ م م َ مضروبا مشتركا الى

$$\frac{م م َ (ع^٢ + ع َ^٢ - ٢ ع ع َ)}{م + م َ} = \frac{م م َ (ع - ع َ)^٢}{م + م َ}$$

وأما الطرف

وأما الطرف الثاني فأنه يؤول على التوالي الى

$$\text{م}\left[\frac{\text{مَ}(\text{ع}-\text{عَ})}{\text{م}+\text{مَ}}\right]^2+\text{مَ}\left[\frac{\text{م}(\text{ع}-\text{عَ})}{\text{م}+\text{مَ}}\right]^2=\frac{\text{م}\,\text{مَ}^2(\text{ع}-\text{عَ})^2}{(\text{م}+\text{مَ})^2}+\frac{\text{مَ}\,\text{م}^2(\text{ع}-\text{عَ})^2}{(\text{م}+\text{مَ})^2}=\left(\frac{\text{ع}-\text{عَ}}{\text{م}+\text{مَ}}\right)^2(\text{م}\,\text{مَ}^2+\text{مَ}\,\text{م}^2)=$$

$$\left(\frac{\text{ع}-\text{عَ}}{\text{م}+\text{مَ}}\right)^2(\text{م}+\text{مَ})\,\text{م}\,\text{مَ}=\text{م}\,\text{مَ}\,\frac{(\text{ع}-\text{عَ})^2}{\text{م}+\text{مَ}}$$ وحينئذ يكون

$$\frac{\text{م}\,\text{مَ}(\text{ع}-\text{عَ})^2}{\text{م}+\text{مَ}}-\frac{\text{م}\,\text{مَ}(\text{ع}-\text{عَ})^2}{\text{م}+\text{مَ}}$$ وهو المطلوب

وثانيا اذا كان الجسمان سائرين في جهتين متضادتين فان فقد القوة الحية يصير مبينا من بعد اجراء العمل كما تقدم بالمقدار الآتي

$$\frac{\text{م}\,\text{مَ}(\text{ع}+\text{عَ})^2}{\text{م}+\text{مَ}}$$

ثالثا اذا كان احد الجسمين ساكنا فان فقد القوة الحية يكون مبينا بالمقدار الآتي

$$\frac{\text{م}\,\text{مَ}\times\text{ع}^2}{\text{م}+\text{مَ}}$$

تنبيه — مهما كانت الحالة المعتبرة فانه يوجد دائما شغل مفقود بانصدام الأجسام الرخوة والشغل المفقود الأعظم يقابل الحالة التي يكون فيها سير الجسمين في جهتين متضادتين

ثانيا حالة الأجسام المرنة — اعلم أنه في المدة الأولى من تصادم الأجسام المرنة يحصل فقد قوة حية كما في حالة الأجسام الرخوة وهذا الفقد منسوب لتغير اشكال الأجسام المتصادمة في المدة المذكورة ولكن في المدة الثانية من الانصدام بسبب رجوع اشكال الأجسام الى أصلها بتأثير المرونة ترد كل القوة الحية التي صار فقدها في المدة الأولى بالتمام والكمال وعليه فالقوة الحية المفقودة بالانصدام تكون معدومة في حالة الاجسام المرنة

الحالة التي يكون فيها الجسمان المتصادمان متحركين في اتجاهين حيثما اتفق

اذا تصادم جسمان متحركان في اتجاهين حيثما اتفق فان سرعة كل منهما تتغير وتنقص نظرا للانصدام ويتغير اتجاهها بعد الانصدام بخلاف ما اذا كان الجسمان المذكوران سائرين في اتجاه واحد وجهة واحدة فان سرعة الجسم الصادم تنقص وسرعة الجسم المصدوم تزداد وحيث أن السرعة المفقودة بالانصدام بالنسبة لكل من الجسمين المتصادمين عند تحركهما في اتجاهين حيثما اتفق عبارة عن المركبة الثانية للسرعة قبل الانصدام فلتعيينها يقال انه اذا فرض كما في شكل ٧٨ أن اب مقدار واتجاه سرعة أحد الجسمين قبل لحظة الانصدام ولنرمز لها بالرمز ك وأن اء مقدار واتجاه سرعته بعد لحظة الانصدام ولنرمز لها بالرمز كَ فحينئذ اذا وصل ءب وكمل متوازي الأضلاع اءدب يكون اد عبارة عن مقدار واتجاه السرعة المفقودة بالانصدام ولنرمز لها بالرمز ع وحينئذ اذا علم مقدارا ك ،كَ والزاوية الواقعة بينهما يمكن

شكل ٧٨

تعيين مقدار واتجاه السرعة المفقودة بالانصدام ع بواسطة الحساب من مثلث ا ء ب الذي يكون معلوما فيه الضلعان والزاوية المحصورة بينهما

واذا كمل متوازي الاضلاع ا ب حـ ء يرى ان السرعة المفقودة بالانصدام تكون عبارة عن محصلة السرعة قبل الانصدام والسرعة بعد الانصدام مأخوذة في الجهة المضادة

ولنبرهن على نظرية كارنو في حالة تصادم الجسمين المتحركين في اتجاهين حيثما اتفق فنقول

نظرية كارنو — من بعد ملاحظة ان نظرية كارنو لا تنطبق على تصادم الأجسام المرنة يقال انه اذا اعتبرت السرع الثلاث ى ، ك ، ع شكل ٧٨ بالنسبة لأحد عناصر الجسمين المتصادمين لمثلث ا ب حـ يحدث

ى² = ك² + ع² + ٢ ع ك جتا (ك ، ع)

واذا رمز لجسم العنصر المذكور بالرمز م وضرب طرفا المعادلة المذكورة في م يحدث

م ى² = م ك² + م ع² + ٢ م ع ك جتا (ك ، ع) او يكون

م (ى² ـ ك²) = م ع² + ٢ م ع ك جتا (ك ، ع)

وحيث أنه بالنسبة لكل عنصر من عناصر الجسمين المتصادمين تحدث معادلة مشابهة للمعادلة المذكورة فحينئذ اذا جمعت المعادلات المشابهة للمعادلة المذكورة المنسوبة للعناصر المختلفة السابق ذكرها طرفا بطرف على بعضها فانه يحدث

مجموع م (ى² ـ ك²) = مج م ع² + ٢ مج م ع ك جتا (ك ، ع)

ولكن اذا رمزنا بحرف ق للقوة الواقعة على العنصر الذي جسمه م التي تحدث السرعة ع في نهاية مدة الانصدام الصغيرة جدا بقدر ما يراد التي نرمز لها بالرمز ز يكون

ق = م ع / ز ومنها يحدث ق ز = م ع

واذا وضع عوضا عن م ع مقداره في المعادلة السابقة يحدث

مجموع م (ى² ـ ك²) = مجموع م ع² + ٢ مجموع ق ز ك جتا (ك ، ع)

وحيث ان اتجاه وجهة القوة ق هما طبعا في اتجاه وجهة السرعة ع فيكون

مجموع م (ى² ـ ك²) = مجموع م ع² + ٢ مجموع ق ز ك جتا (ك ، ق)

ولكن حيث ان الحاصل ق ز ك جتا (ك ، ق) عبارة عن شغل القوة ق في مدة الزمن ز الصغير جدا بقدر ما يراد فيمكن اعتبار الشغل المذكور معدوما وعليه يكون

مجموع ق ز ك جتا (ك ، ق) = ٠ وحينئذ يحدث

مجموع م (ى² ـ ك²) = مجموع م ع²

اعنى ان مجموع مفاقيد القوى الحية يساوي مجموع القوى الحية المنسوبة للسرع المفقودة لعناصر الجسمين

المتصادمين وهو المطلوب

واذا رمز للشغل الناتج من تأثير الانضدام بالرمز شن يكون

$$ش_ن = \frac{1}{2} \text{ مجموع } م (ك - ك)$$ او يكون

$$- ش_ن = \frac{1}{2} \text{ مجموع } م (ك - ك)$$ وبناء على نظرية كارنو يكون

$$- ش_ن = \frac{1}{2} \text{ مجموع } م ع^2$$

وبضم هذه المعادلة الى المعادلة العمومية للقدرة الحية التى هى مجموع ش د = ½ مجموع م (ع - ع) طرفا بطرف يحدث

$$\text{مجموع ش د} - ش_ن = \frac{1}{2} \text{ مجموع } م (ع - ع) + \frac{1}{2} \text{ مجموع } م ع^2$$

وحيث انه فى الآلات المتحركة اى فى الجملة المادية المتحركة مجموع ش د عبارة عن ثلاثة اشغال وهى الشغل المحرك اى شغل القوى المحركة الذى يرمز له بالرمز شم ويعتبر دائما موجبا والشغل المفيد اى شغل المقاومات المفيدة اى الأصلية الذى يرمز له بالرمز شف ويعتبر سالبا ثم شغل المقاومات التأثيرية الذى يرمز له بالرمز شت وتلك المقاومات عبارة عن الاحتكاكات ويبوسة الأحبال والسيور وان الشغل المذكور يكون سالبا أيضا فحينئذ تؤول المعادلة السابقة الى

$$ش_م - ش_ف - ش_ت - ش_ن = \frac{1}{2} \text{ مجموع } م (ع - ع) + \frac{1}{2} \text{ مجموع } م ع^2$$

واذا رمز لمجموع الثلاثة اشغال السالبة بالرمز شو الذى يكون عبارة عن الشغل المقاوم الخام فأنه يحدث

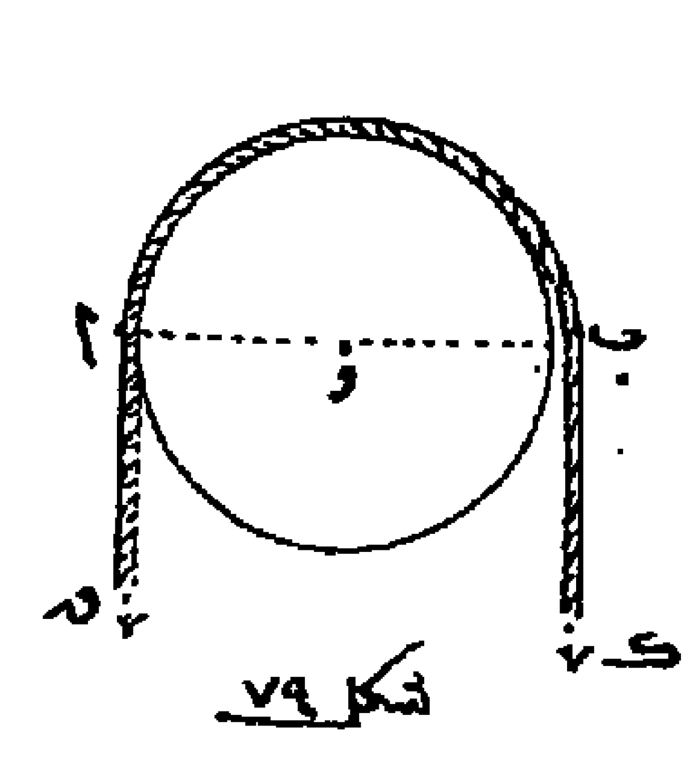
$$ش_م - ش_و = \frac{1}{2} \text{ مجموع } م (ع - ع) + \frac{1}{2} \text{ مجموع } م ع^2$$

وهذه معادلة القدرة الحية مطبقة على حركة الآلات أو الجمل المادية باعتبار الانضدام

فى يبوسة الأحبال

يبوسة الحبل هى المقاومة التى يحدثها عند لفه على بكرة أو طنبور

ويبوسة الأحبال تحدث فقدا مضاعفا من الشغل حيث انه يقتضى قوة لثنيها ولفها وقد ظهر من التجربة ان الفرع ب ك للقوة المقاومة ك لا يلتصق بالضبط على الطنبور كما فى شكل ٧٩ بخلاف الفرع ا د للقوة المحركة فأنه يبقى ملتصقا على الطنبور المذكور بحيث ان و ب ذراع رافعة المقاومة يزداد ويحتاج لقوة كبيرة لأجل حصول التوازن ويبوسة الحبل تناسب عكسيا لقطر الطنبور وغير متعلقة بالسرعة وتتغير تبعا لجنس الحبل ولدرجة التوائه وعلى حسب كونه جديدا أو مستعملا أبيض أو مقطرنا جافا أو مبتلا



شكل ٧٩

وبناء على مناقشة نتائج التجارب التى تحصل عليها المعلم كولمب بخصوص تعيين مقدار اليبوسة قد استنتج ناقشيه القانون الآتى الذى يحسب به مقدار

اليبوسة المذكورة التي يرمز لها بحرف ر وهو

$$\text{ر} = \frac{1}{\text{ء}}\left(\text{ا}\,\text{ءَ}^{\text{و}} + \text{ب}\,\text{ءَ}^{\text{و}}\,\text{ك}\right) \ldots\ldots\ (٢)$$

الذى فيه ء رمز لقطر البكرة أو الطنبور ، ءَ رمز لقطر الحبل ، ا ءَ^و كمية ثابتة بالنسبة للحبل الواحد ، ب ءَ^و ك كمية مناسبة للثقل المرفوع ك ، و عدد يتغير على حسب استعمال الحبل واستهلاكه وقد اعتبر نافيه و = ٢ بالنسبة للاحبال الجديدة ذات القطر الكبير ، و = ١٫٥ بالنسبة للاحبال الاكثر من نصف استعمال ، و = ١ بالنسبة للأحبال الرفيعة اللينة جدا

واعتبر أيضا أنه بالنسبة لمقاومة معلومة ك تكون المقاومة المنسوبة ليبوسة حبل ابيض متغيرة بالنسبة العكسية لقطر البكرة أو الطنبور ومناسبة للأس (و) لقطر الحبل المذكور

وينتج من الاعتبار المذكور أنه بالنسبة لحبلين مختلفي القطر ملتفين على بكرتين غير متساويتي القطر ورافعين ثقلين متساويين نكون

$$\text{رَ} = \text{ر}\,\frac{\text{ءُ}}{\text{ءَ}}\left(\frac{\text{ءَ}}{\text{ءُ}}\right)^{\text{و}} \ldots\ldots\ (\text{ب})$$

وفى هذا القانون رَ المقاومة المنسوبة ليبوسة الحبل الذى قطره ءُ الملتف على البكرة التى قطرها ءَ ، ر المقاومة المنسوبة ليبوسة الحبل الذى قطره ءَ الملتف على البكرة التى قطرها ء

وأما بالنسبة للأحبال المقطرنة فان اليبوسة لا تتغير تغيرا محسوسا بالنسبة لدرجة الاستهلاك ومن الأضبط فى هذه الحالة ان نعوض فى القانون السابق النسبة $\left(\frac{\text{ءُ}}{\text{ءَ}}\right)^{\text{و}}$ بالكمية $\frac{\text{هَ}}{\text{ه}}$ ، ه ، هَ رمزان لعدد خيوط الجديلة المشتمل عليها كل من الحبلين المذكورين وحينئذ يكون

$$\text{رَ} = \text{ر}\,\frac{\text{ءُ}}{\text{ءَ}} \times \frac{\text{هَ}}{\text{ه}}$$

وقد اعتبر المعلم نافيه أن فى الأحبال البيضا المبتلة تكون اليبوسة الثابتة ا ءَ^و ضعف يبوسة الأحبال بعينها فى الحالة الجافة وأما اليبوسة ب ءَ^و فتكون بعينها كما فى الحالة الأخيرة

وهناك جدول يشتمل على يبوسة أحبال مختلفة ملتفة على بكرة قطرها متر واحد محسوبا بمعرفة المعلم نافيه بناء على تجارب المعلم كولمب

اجناس الأحبال	عدد خيوط الحبل	اقطار الأحبال	ثقل المتر الطولى من الأحبال	اليبوسة الثابتة ا ور	اليبوسة المتغيرة سـ ور بالنسبة للكيلوجرام الواحد في الحبل ك
		متر	كيلوجرام	كيلوجرام	كيلوجرام
حبل ابيض جديد	٣٠	٠٫٠٢٠٠	٠٫٢٨٢٤	٠٫٢٢٢٤٦	٠٫٠٠٩٧٢٨٢
« « «	١٥	٠٫٠١٤٤	٠٫١٤٤٨	٠٫٠٦٢٥١٤	٠٫٠٠٥٥١٨٢
« « «	٦	٠٫٠٠٨٨	٠٫٠٥٢٢	٠٫٠١٠٦٠٢٨	٠٫٠٠٢٢٨٠٤
حبل مقطرن	٣٠	٠٫٠٢٣٦	٠٫٢٤٢٦	٠٫٢٤٩٦	٠٫٠١٢٥٥١٤
« «	١٥	٠٫٠١٦٨	٠٫١٦٢٢	٠٫١٠٥٩٢٨	٠٫٠٠٦٠٥٩٢
« «	٦	٠٫٠٠٩٦	٠٫٠٦٩٢	٠٫٠٢١٢٠٨	٠٫٠٠٢٥٩٦٢

وبواسطة الجدول السابق وتسليم صحة القانونين يمكن حل جميع المسائل المشابهة للمسألة الآتية

مسألة ـ اذا كان المطلوب تعيين مقدار المقاومة المنسوبة ليبوسة حبل ابيض جديد قطره ٠٫٠٢٥٤ متر ملتف على بكرة قطرها ٠٫٤٠ متر رافع ثقلا قدره ٥٠٠ كيلوجرام يقال

نحسب المقاومة المنسوبة لليبوسة بناء على الحبل الأبيض الجديد الذى قطره ٠٫٠٢ متر القريب جدا من ٠٫٠٢٥٤ متر وحينئذ من بعد تعويض الرموز بمقاديرها فى معادلة (١) يحدث

$$ر = \frac{١}{٠٫٤٠} (٠٫٢٢٢٤٦ + ٠٫٠٠٩٧٢٨٢ \times ٥٠٠) = ١٢٫٧٢ \text{ كيلوجرام}$$

ثم نحسب المقاومة المنسوبة ليبوسة الحبل الذى قطره ٠٫٠٢٥٤ متر الموضوع فى الأحوال السابقة عينها بقانون ٥ وحينئذ يكون

$$ر' = ١٢٫٧٢ \left(\frac{٠٫٠٢٥٤}{٠٫٠٢}\right)^{٢} = ٢٠٫٥٢ \text{ كيلوجرام}$$

وأخيرا لما ناقش المعلم موران النتائج التى تحصل عليها كولومب استنتج مع الرمز بحرفى ء ، هـ للكميتين اللتين بينهما نافيه بالمقدارين ا ور ، سـ ور ماهو آت

أولا بالنسبة للأحبال الجديدة التى من الكتان غير المقطرن المسماة بالأحبال البيضا ناشفة كانت أو مندّاة بالماء فان الكميتين ء ، هـ تتغيران تقريبا بالنسبة لمربع قطر الحبل

وثانيا بالنسبة للأحبال السابقة عينها المستهلكة نصف استهلاك فان ء ، هـ يتغيران بالنسبة للأس ١٫٥ أعنى بالنسبة للجذر التربيعى لمكعب اقطار الأحبال

وثالثا بالنسبة للأحبال المقطرنة فان هـ تكون مناسبة لعدد خيوط جديلة الحبل

وعلى هذا قد وضع المعلم موران القوانين الآتية التى فيها ن رمز لعدد خيوط الجديلة ، ء رمز لقطر البكرة وهى

اولا بالنسبة للأحبال البيضاء

ع = (٠ر٠٠٢٩٧ + ٠ر٠٠٠٢٤٥ × ن) ن ، هـ = ٠ر٠٠٠٣٦٣ × ن

ثم ر = ١/ء [(٠ر٠٠٢٩٧ + ٠ر٠٠٠٢٤٥ × ن) ن + ٠ر٠٠٠٣٦٣ ن ك] كيلوجرام

وثانيا بالنسبة للأحبال المقطرنة

ع = (٠ر٠٠١٤٥٧٥ + ٠ر٠٠٠٣٤٦ × ن) ن ، هـ = ٠ر٠٠٠٤١٨ × ن

ثم ر = ١/ء [(٠ر٠٠١٤٥٧٥ + ٠ر٠٠٠٣٤٦ × ن) ن + ٠ر٠٠٠٤١٨ × ن ك] كيلوجرام

وهاك جدولا يشتمل على اقطار الأحبال على حسب عدد خيوط الجديلة

عدد خيوط الجديلة	الأقطار	عدد خيوط الجديلة	الاقطار	عدد خيوط الجديلة	الاقطار	عدد خيوط الجديلة	الأقطار
	متر		متر		متر		متر
٦	٠ر٠٨٩	٢١	٠ر١٦٨	٣٦	٠ر٢٢٠	٥١	٠ر٢٦١
٩	٠ر١١٠	٢٤	٠ر١٧٩	٣٩	٠ر٢٢٨	٥٤	٠ر٢٦٨
١٢	٠ر١٢٧	٢٧	٠ر١٩٠	٤٢	٠ر٢٣٧	٥٧	٠ر٢٧٦
١٥	٠ر١٤١	٣٠	٠ر٢٠٠	٤٥	٠ر٢٤٦	٦٠	٠ر٢٨٣
١٨	٠ر١٥٥	٣٣	٠ر٢١٠	٤٨	٠ر٢٥٤		

تطبيق على ما تقدم ـ اذا كان المطلوب حل المسألة السابقة التى صار حلها بوضع مقدارا ع ، هـ فى المعادلة الآتية وهى

ر = ١/ء (ع + هـ ك)

مع ملاحظة انه فى هذه الحالة ن = ٤٨ بناء على الجدول السابق حيث ان قطر الحبل يساوى ٠ر٢٥٤ متر وعليه يكون

ر = ١/٠ر٤٠ [(٠ر٠٠٢٩٧ + ٠ر٠٠٠٢٤٥ × ٤٨) ٤٨ + ٠ر٠٠٠٣٦٣ × ٤٨ × ٥٠٠] أو

ر = ١/٠ر٤٠ [٠ر٥٧٨٧٥٠٤ + ٠ر٠١٧٤٢٤ × ٥٠٠) = ٢٣ر٢٣ كيلوجرام

وهذا المقدار الأخير مغاير للمقدار ٢٥ر٠٢ كيلوجرام الذى وجد باستعمال جدول نافييه الشغل المفقود بيبوسة الأحبال ـ اذا لاحظنا شكل ٧٩ وقطعنا النظر عن نصف قطر الحبل وعن تباعده عن البكره بسبب اليبوسة فان الشغل المفقود بيبوسة الحبل المذكور الملتف على البكرة المذكورة باعتبار قطرها يساوى ٠ر٤٠ بالنسبة للدورة الكاملة يكون

شَ = ط ء × ٢٣ر٢٣ كجرام = ٣ر١٤ × ٠ر٤٠ × ٢٣ر٢٣ = ٢٩ر١٨ كيلوجرامترا

وحيث أنه بقطع النظر عن الاحتكاك يكون مقدار شغل القوة المحركة بالنسبة للدورة الكاملة هو

شم = ن × ط

$$\text{م ث} = \text{ه} \times \text{ط} \, (\text{ء} + \text{ءَ}) = \text{ك} \times \text{ط} \, (\text{ء} + \text{ءَ}) + \text{ر} \times \text{ط ء}$$

فيكون

$$\text{ه} = \text{ك} + \text{ر} \times \frac{\text{ء}}{\text{ء} + \text{ر}}$$

ومن هذه المعادلة يستخرج مقدار القوة المحركة

التحرك على منحن

اذا تحرك جسم على منحن أملس فأن المنحنى يحدث ضغطا أو رد فعل على الجسم المذكور فى كل نقطة ولكن حيث ان رد الفعل يكون على الدوام عموديا على المنحنى فأنه لا ينشأ عنه اسراع أو ابطاء لحركة الجسم المذكور ولاجل تعيين سرعة الجسم فى أى نقطة يجب تحليل القوى المؤثرة على الجسم فى اتجاه الحركة فى اللحظات المتتالية واعتبار تأثير هذه القوى المحللة

فاذا انزل متحرك غير مرن على منحن أملس فى مستو رأسى بتأثير التثاقل وكان المطلوب ايجاد سرعة المتحرك المذكور فى أى وضع كان يقال

انه يمكن اعتبار المنحنى نهاية مضلع اضلاعه متساوية الميل على بعضها وعددها آخذ فى الازدياد بقدر مايراد وان الزوايا الواقعة بين الاضلاع المتتالية تصير عند النهاية معدومة

شكل ٨٠

وحينئذ اذا فرض ان المضلع المذكور هو $\text{ا ا}_1 \text{ا}_2 \ldots \text{ا}_\text{ن}$ شكل ٨٠ ورسم $\text{ا}_1\text{ا}_1'$ ، $\text{ا}_2\text{ا}_2'$ ، $\text{ا}_3\text{ا}_3'$ .... عمودية على الخط الرأسى المار بنقطة ا وان ه هى الزاوية الواقعة بين ضلعين متتابعين من المضلع اللذين لا يلزم أن يكون طولهما واحدا

وان ع هى سرعة المتحرك حينما يكون فى نقطة ا فى الاتجاه ا ا_1

وان ع_1 هى سرعة المتحرك حينما يكون فى نقطة ا_1 فى الاتجاه $\text{ا}_1\text{ا}_2$

وان ع_2 هى سرعة المتحرك حينما يكون فى نقطة ا_2 فى الاتجاه $\text{ا}_2\text{ا}_3$

. . . .

وان $\text{ع}_\text{ن}$ هى سرعة المتحرك حينما يكون فى نقطة $\text{ا}_\text{ن}$ فى الاتجاه $\text{ا}_{\text{ن}-1}\text{ا}_\text{ن}$

فأنه بتطبيق نظرية القدرة الحية على كل مسافة جزئية مثل ا ا_1 ، $\text{ا}_1\text{ا}_2$ ،..... يكون

$$\tfrac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ع}_1^2 - \tfrac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ع}^2 = \text{ث ت} \quad \text{او}$$

$$\frac{\text{ث}}{2\text{ح}}\,\text{ع}_1^2 - \frac{\text{ث}}{2\text{ح}}\,\text{ع}^2 = \text{ث} \times \text{ا ا}_1' \quad \text{أو}$$

$$\text{ع}_1^2 = \text{ع}^2 + 2\text{ح} \times \text{ا ا}_1' \quad \text{وبمثل ذلك يكون}$$

$$\text{ع}_2^2 = \text{ع}_1^2\,\text{حتا}^2\text{ه} + 2\text{ح} \times \text{ا}_1'\text{ا}_2'$$ حيث انه وصل المتحرك الى ا_1 فأنه يغير اتجاهه

الى ا ا بسرعة قدرها ع جتاهـ وكذا يكون

$$ع_٢^٢ = ع_١^٢ جتا^٢ هـ + ٢ جـ × ا ا$$

. . . .

$$ع_ن^٢ = ع_{ن-١}^٢ جتا^٢ هـ + ٢ جـ ا_{ن-١} ا_ن$$

وبالجمع والتحويل يحدث

$$ع_ن^٢ + (ع_١^٢ + ع_٢^٢ + ع_٣^٢ + \dots + ع_{ن-١}^٢) حا^٢ هـ = ع^٢ + ٢ جـ × ا_ن \dots (١)$$

فاذا كان ى رمزا للزاوية الواقعة بين اتجاهي الحركة في ا ا، ع رمزا لاكبر مقادير السرع ع، ع، ع، ..... ع، ا ا = ل يكون

$$(ع_١^٢ + ع_٢^٢ + ع_٣^٢ + \dots + ع_{ن-١}^٢) حا^٢ هـ < (ن-١) ع^٢ حا^٢ هـ \quad \text{أو}$$

$$(ع_١^٢ + ع_٢^٢ + ع_٣^٢ + \dots + ع_{ن-١}^٢) حا^٢ هـ < ى ع^٢ (\frac{حا^٢ هـ}{هـ})$$

وهذا المقدار ينعدم حيثما زيد ن الى مالانهاية مع بقاء ى ثابتا وعلى ذلك فمتى آل كثير الأضلاع الى المحنى فالمعادلة (١) تؤول الى

$$ع_ن^٢ = ع^٢ + ٢ جـ ل$$

وهي المعادلة التي منها تتعين السرعة في اى نقطة من نقط المحنى بدلالة السرعة الابتدائية والارتفاع الرأسي الذى سقط منه المتحرك

وبحذف الرمز ن الموضوع تحت السرعة ع يكون

$$ع^٢ = ع^٢ + ٢ جـ ل$$

تنبيـــه — قد فرض فيما تقدم ان المتحرك غير مرن وانه متحرك على تقعير المحنى بتأثير قوة التثاقل وذلك لكي يتحرك المتحرك المذكور ملاصقا للمحنى وقد يتحرك المتحرك السائر على محنى هذا المحنى في شروط مخصوصة الا ان الفرض المذكور سابقا يمكن توضيحه بتصور ان المضلع ا ا .... عبارة عن انبوبة مضلعة تؤول في النهاية الى انبوبة محنية قطرها الداخل صغير وكاف بالضبط لمرور المتحرك وحينئذ فحالة السير على محنى تكون محققة لان السرعة التي يأخذها المتحرك في اى نقطة تكون مساوية لسرعة متحرك سائر على تقعير المحنى أو تحديبه حيث انها تبقى على الدوام مماسة له

وينتج من ذلك أولا اذا خرج المتحرك من نقطة ا من السكون يكون ع = ٠، ع^٢ = ٢ جـ ل اعني ان السرعة المكتسبة لجسم خارج من السكون ومتحرك على محنى أملس يساوى السرعة التي يكتسبها الجسم الساقط بحرية من الارتفاع نفسه وزيادة على ذلك يمكن التعبير عن المعادلة ع^٢ = ع^٢ + ٢ جـ ل بأن يقال

مربع السرعة في اى نقطة مثل ا يساوى مربع السرعة في اى نقطة أخرى مثل ا زائدا مربع السرعة التي يكتسبها المتحرك بواسطة التثاقل لو خرج من السكون قاطعا المسافة الرأسية عينها وهذه النتيجة

غير

غير متعلقة بشكل المنحنى

وثانيا اذا صعد جسم على منحنٍ فان الارتفاع الرأسى الذى يصل اليه يساوى الارتفاع الرأسى الذى يسقط منه بحيث يكون له عند انتهاء السقوط السرعة التى صعد بها وذلك لأن للجسم فى صعوده تتناقص سرعته بنفس الكيفية التى تتزايد بها فى نزوله فاذا كان ع٠ سرعة المتحرك فى اى نقطة من حركته على المنحنى ، ع سرعته بعد قطع المسافة الرأسية ل من ابتداء تلك النقطة يكون

$$ع^{٢} = ع_{٠}^{٢} - ٢\,ء\,ل$$

وحينئذ اذا كان ب ا ت شكل ١٨ منحنيا موجودا فى مستو رأسى ، ا أوطى نقطة منه والجزآن اب ، ات متماثلين ومتساويين فأن المتحرك فى نزوله على ب ا يكون له سرعة مساوية للسرعة التى يرتفع فيها الى نقطة ت والسرع التى يأخذها المتحرك فى ارتفاعات متساوية عند صعوده ونزوله تكون متساوية والزمن الكلى للصعود يكون مساويا للزمن الكلى للنزول

ومن الواضح انه متى وصل المتحرك الى ت فأنه ينزل ثانيا الى ا ويرتفع الى ب ويستمر على ذلك بمعنى أن الحركة تصير مترددة أى ارتجاجية والزمن اللازم للمرور من ب الى ت يسمى زمن الرجة

وثالثا اذا فرض ان ب ا ت قوس من محيط دائرة نصف قطره نق ونقطة ا هى أوطى نقطة ، ان نصف القطر الرأسى ، ب هـ خط عمودى على ان ، ع سرعة المتحرك فى نزوله من السكون من نقطة ب الى أوطى نقطة ا يكون

شكل ١٨

$$ع^{٢} = ٢\,ء \times اهـ = \frac{٢\,ء \times \overline{اب}^{٢}}{٢\,نق} = \frac{ء}{نق} \times \overline{اب}^{٢} \qquad \text{أو}$$

$$ع = اب \sqrt{\frac{ء}{نق}}$$

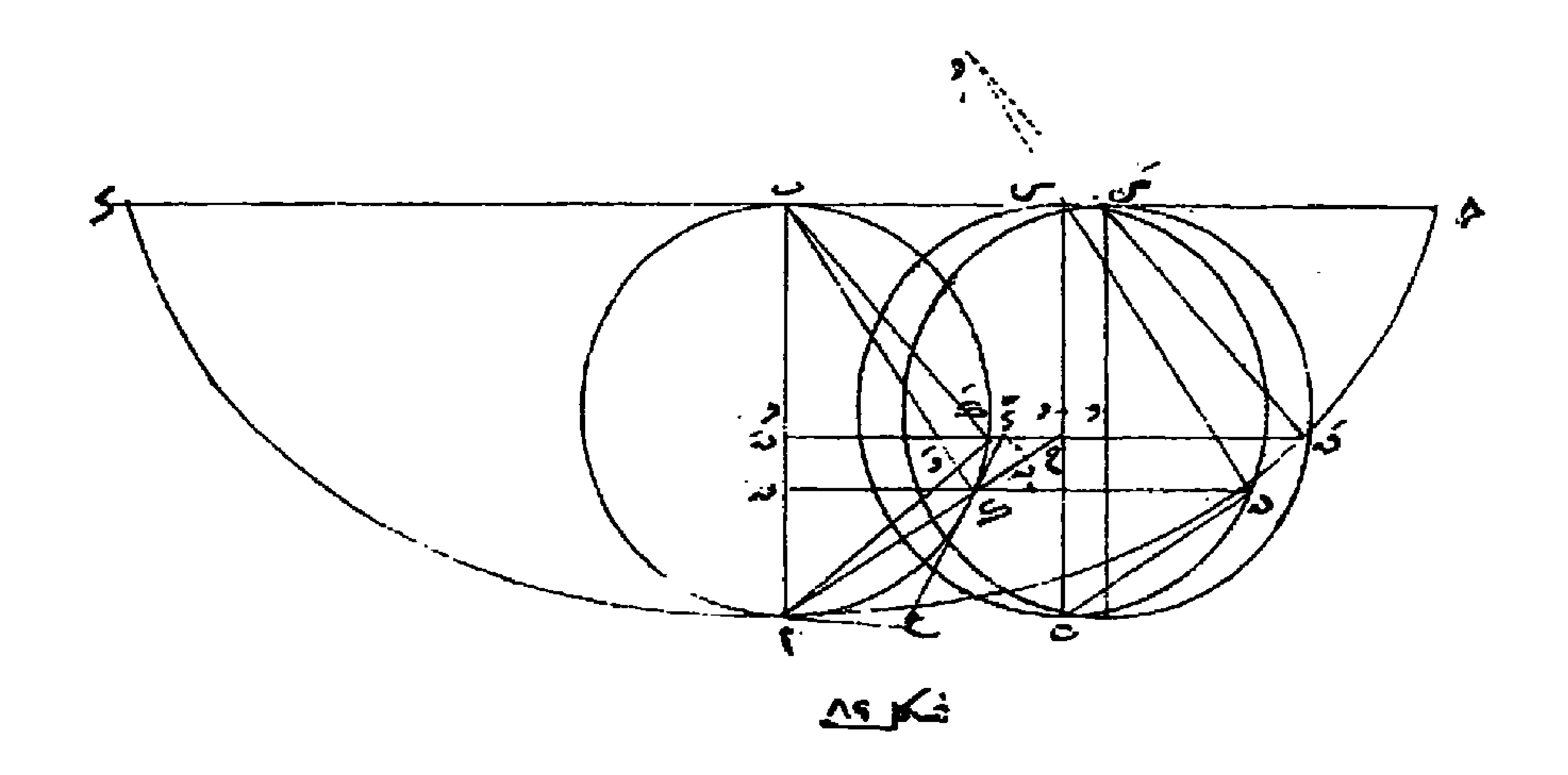
بمعنى ان السرعة فى أوطى نقطة تتغير بالنسبة لوتر قوس النزول

وهذا الأمر يحصل بعينه اذا فرض ان النقطة المادية مربوطة فى طرف حبل غير قابل للتمدد طوله ون وطرفه الثانى مثبت فى نقطة ن

تنبيه — الزمن اللازم لسقوط متحرك من السكون من نقطة ب الى أوطى نقطة ا لا يبقى ثابتا غالبا بل يتغير بتغير نقطة ب الا أنه اذا كان المنحنى سكلويديا فان زمن السقوط الى أوطى نقطة يبقى ثابتا مهما كان وضع النقطة التى يخرج منها المتحرك

وبعبارة أخرى ان زمن الرجة على منحنى سكلويدى محوره رأسى ورأسه أسفل يكون ثابتا مهما كان طول قوس الرجة ولذلك يسمى المنحنى السكلويدى منحنى الازمنة المتساوية وخاصية المنحنى السكلويدى هذه لها أهمية عظمى فى نظرية البنادول وانشائها وسنبرهن عليها الا ان الأصوب ان نتكلم اولا على خواص المنحنى السكلويدى فنقول

تعريف ـ اذا تدحرجت دائرة ت ه س التى مركزها و فى مستوٍ واحد على خط مستقيم حـ ء شكل ٨٩



شكل ٨٩

فان اى نقطة ثابتة على المحيط ترسم منحنيا حـ ه ا ء يسمى منحنيا سكلويديا وحينئذ اذا فرضنا أن حـ ه ا ء هو المنحنى المتكون من لفة كاملة للدائرة الراسمة وأن حـ ا ء هما النقطتان اللتان فيهما تترك النقطة الراسمة المستقيم حـ ء ثم تعود اليه وأن س ه ت هو وضع محيط الدائرة حينما تكون النقطة الراسمة فى ه وأن ب ك ا وضعها حينما تكون النقطة الراسمة على اعظم بعد من حـ ء يرى بديهيا أن جزئى المنحنى ا حـ ا ء يكونان متساويين ومتشابهين

ثم ان المستقيم ا ب الذى يقطع حـ ء بالتعامد عليه يسمى المحور وان حـ ء يسمى القاعدة وأن نقطة ا تسمى رأس المنحنى السكلويدى

اذا تقرر هذا ورسم مستقيم ه ك ه عموديا على ا ب ووصل ه س ا ه ت يقال حيث ان النقطة الراسمة ه تخرج من حـ وان كل نقطة من نقط القوس س ه كانت مماسة للخط حـ س فيكون قوس ه س = حـ س وحيث ان الخط حـ ب مساو لنصف المحيط ب ك ا المساوى لنصف المحيط س ه ت فيكون قوس ه ت = ب س = ه ك حيث ان ه ك مساو وموازٍ الى ب س

وحينئذ اذا فرضنا أن المحيط يبتدئ فى التدحرج من الوضع ب ك ا ومعه النقطة الراسمة فى ا حتى وصلت هذه النقطة الى وضع مثل ه يكون قوس ا ك = ب س = ه ك ويكون أيضا

أولا ان ه ت يكون مماسا للمنحنى السكلويدى فى نقطة ه وذلك لأنه متى أتت النقطة الراسمة فى ه فان الدائرة الراسمة تكون مماسة للخط حـ ء فى نقطة س ونقطة س هذه تبقى ساكنة لحظة من الزمن أى انها تصير مركز دوران وقتى والدائرة تدور حينئذ حول نقطة س وعليه فتتحرك نقطة ه فى اتجاه عمودى على س ه أى ان س ه يكون عموديا على المنحنى السكلويدى فى نقطة ه وحينئذ

لخط

لخط ده ت العمودى على س ه يكون هو المماس فى ه

وثانيا طول أى قوس مثل اه مبتدئا من الرأس هو ضعف وتر القوس اك المقطوع بالخط الافقى ه ك ه وذلك لانه اذا كان ه ك ه افقيا قريبا جدا من ه ك ه فنرسم اع ا ع ك كمماسين للدائرة فى ١ ا ك فيكون اع موازيا للقاعدة وموازيا أيضا الى ه ك ه ثم نمد ع ك ا ا ك حتى يتقابلا مع ه ك ه فى نقطتى ى ا ع ونمد ى ه عموديا على ك ع

وحينئذ بسبب ان اع ا ع ك مماسان لدائرة واحدة فتكون زاوية ع ك ا = زاوية ع اك ولكن زاوية ع ك ا = الزاوية المقابلة لها ى ك ع وكانت زاوية ى ع ك = زاوية ع ا ك فاذن تكون زاوية ى ك ع = زاوية ى ع ك وعليه يكون ع ك = ى ك ه ولكن اذا اصغر القوس ك ك بقدر ما يراد فانه يميل لأن يتحد مع المماس ك ى وعند النهاية يكون مساويا له وعليه يكون

ى ه عند النهاية قوسا صغيرا من محيط دائرة مركزه ا ونصف قطره اك أعنى أن اك ا ك ه يقدر بهما عند النهاية زيادة الوتر اك

وكذا حيث ان ك ع موازٍ للماس للمنحنى السكلويدى فى نقطة ه فيكون عند النهاية مساويا للقوس ه ه

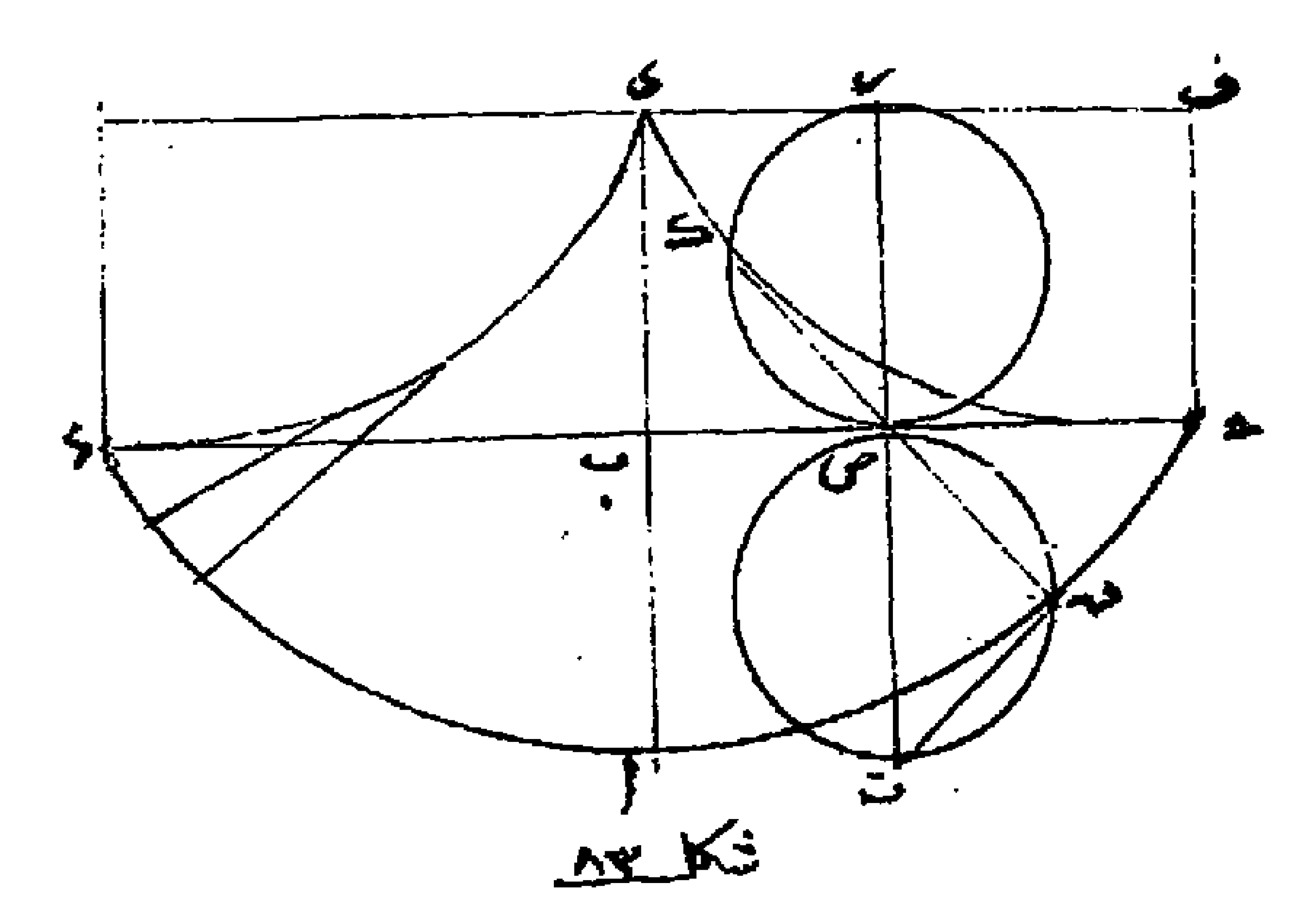
واذن تكون الزيادة ه ه للقوس السكلويدى عند النهاية ضعف الزيادة المقابلة لها للوتر اك

وحيث ان القوس اه والوتر اك ممتدان من نقطة ا فبناء على ما ذكر يكون القوس اه مساويا الى ضعف الوتر اك أو ضعف ت ه

وينتج من ذلك أولا حيث ان $\overline{اك}^2 = اد \times ام$ فيكون $اه = ٢\sqrt{اد \times ام}$

وثانيا يكون القوس $اح = ٢ ام$

لاجل انشاء بندول يرتج فى منحنى سكلويدى معلق نفرض ان ام شكل ٨٣ هو المحور لاحد قاعدة السكلويد المعلوم ونفرض أيضا أن ى ح نصف منحنى سكلويدى مساويا للضبط الى ى ا ورأسه فى نقطة ح وقاعدته ى ف موازية الى ب ح وأن ى ى نصف سكلويد آخر مساوٍ الى ح ا ورأسه فى نقطة ى وقاعدته موازية الى ى س



شكل ٨٣

ثم نفرض كذلك أن ر ك ص ا ص ه ت وضعات إياكانا للدائرتين الراسمتين للمنحنيين ومتماستين معا فى نقطة ص وأن ك ا ه وضعا النقطتين الراسمتين ونصل ك ص ا ص ه فيكون قوس ه ص = ص ح = ر ف = قوس ص ك

وبسبب تساوى الدائرتين تكون الزاويتان ه ص ح ، ك ص ب متساويتين وعليه يكون ه ص ك خطا مستقيما

ولكن ك ص مماسا للمنحنى ى ك ح فى نقطة ك ، ه ص عمودى للمنحنى ح ه ؟ فى نقطة ه وايضا فان القوس ح ك يساوى ضعف الوتر ك ص = ه ك

وحينئذ اذا فرض خيط طوله يساوى طول نصف المنحنى السكلويدى ى ك ح وثبت احدى نهايتيه فى نقطة ى وكان ملازما دائما للمنحنى السكلويدى ى ك ح بحيث يكون ممتدودا وغير قابل للتمدد فيكون على الدوام مماسا للمنحنى السكلويدى المذكور ونهايته الأخرى ترسم المنحنى السكلويدى ح ؟

وحينئذ فتحصل هذه الطريقة العملية لانشاء بندول يرتج على منحنى سكلويدى وهى

انه اذا فرض نصفا منحنيين سكلويديين ماديين ى ك ح ، ى ء شكل ٨٢ موضوعين بحيث يكون لهما مماس مشترك فى نقطة ى وفرض انه ثبت فى نقطة ى طرف خيط رفيع طوله مساو لطول نصف المنحنى السكلويدى ى ك ح وربطت بالنهاية الأخرى ه للخيط المذكور نقطة مادية فهذه النقطة ترتج فى المنحنى السكلويدى ح ا ء بحيث ان الخيط المذكور يلتف على ى ح حينما ترسم نقطة ه المنحنى ح ؟ ثم يلتف من نفسه على ى ء حينما ترسم النقطة المذكوره المنحنى ا ء وهكذا

نصف قطر الانحنا فى اى نقطة مثل ه من المنحنى السكلويدى يساوى ه ك = ٢ ه ص = ضعف العمودى على المنحنى فى النقطة المذكورة كما هو واضح من شكل ٨٢

ومع ذلك فيمكن الوصول الى ذلك مباشرة بواسطة شكل ٨٢ لأنه اذا وصل ب ك ، ب كَ فالمستقيم الأول يقطع ا كَ فى نقطة وَ ثم ان المستقيمين ه س ، هَ سَ العمودين للمنحنى فى نقطتى ه ، هَ يتقاطعان فى نقطة ﻫ التى هى مركز الانحناء فى نقطة ه وحيث ان ه ﻫ ، هَ ﻫ موازيان على التناظر الى ب ك ، ب كَ وأن ه هَ = ٢ × ك وَ عند النهاية فيكون

ه ﻫ = ٢ ب وَ = ٢ ب ك = ٢ ه س عند النهاية

أعنى ان نصف قطر الانحناء يساوى ضعف الخط العمودى

لايجاد الزمن الذى فيه تنزل نقطة مادية على منحنى سكلويدى معكوس يقال

نفرض ان ع شكل ٨٤ هى النقطة التى يخرج منها المتحرك من السكون وان ع ﻫ خط افقى يقابل محور السكلويد ا ب فى نقطة ﻫ ثم نرسم على ا ﻫ محيط دائرة ولكن ه ، هَ احداثيى نقطتين قريبتين من بعضهما ويقابلان هذا المحيط فى نقطتى ك ، كَ ثم نصل ﻫ ك ، ا ك ، ا كَ ، ا ك فالخط الأخير يقطع ﻫ كَ فى نقطة ت وحينئذ يكون

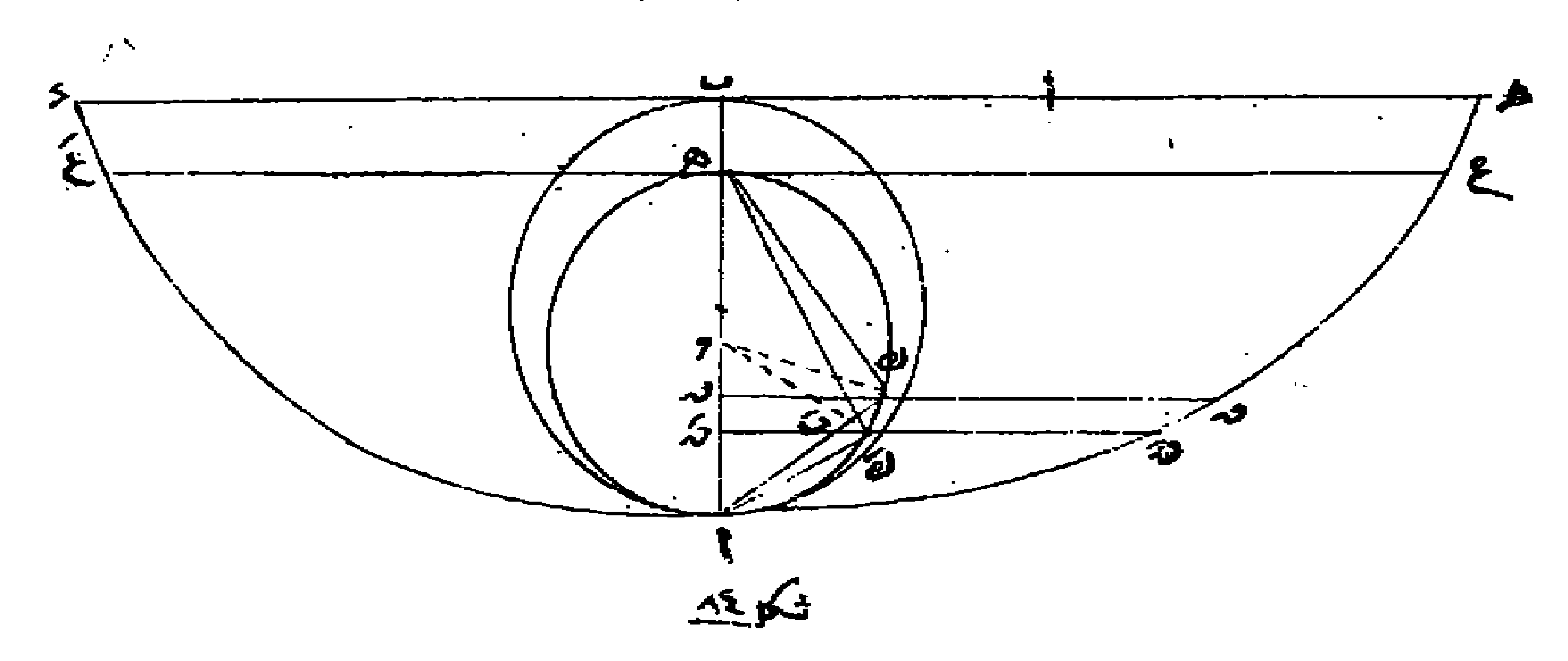
$$\text{قوس } اه = ٢ \sqrt{٢ ب \times ٢ اه} = ٢ \sqrt{\frac{٢ ب \times ٢ كَ}{٢ ﻫ}} = ٢ ٢ ك \sqrt{\frac{ا ب}{ا ﻫ}}$$

ويمثل ذلك يكون

$$\text{قوس } اهَ = ٢ ٢ كَ \sqrt{\frac{ا ب}{٢ ﻫ}} \quad \text{واذن يكون}$$

ه هَ =

$$\text{ف فَ} = ٢\,(\text{ال} - \text{الَ})\sqrt{\frac{\text{اب}}{\text{اهـ}}}$$



شكل ٨٤

ومن حيث ان المتحرك خارج من السكون من نقطة ع فأن السرعة فى ف تساوى السرعة اللازمة لسقوط الجسم بحريه من الارتفاع هـ ف اعنى ان السرعة المذكورة تكون مساوية الى

$$\sqrt{٢\text{ج} \times \text{هـ ف}} = \sqrt{\frac{٢\text{ج} \times \text{هـ ل}^{٢}}{\text{اهـ}}} = \text{هـ ل}\sqrt{\frac{٢\text{ج}}{\text{اهـ}}}$$

وحيث ان ف فَ صغيرة جدا فأن سرعة المتحرك اثناء قطع المسافة المذكورة تكون قريبة الانتظام جدا ومساويا السرعة فى نقطة ف وكلما كان مقدار ف فَ صغيرا كلما قرب هذا الفرض من الصحة وبناء على هذا الفرض يمكن جعل ال - الَ = تَ ل حيث ان الَ ب = ٩٠° ، اتَ = الَ عند النهاية وعليه يكون ال - الَ = تَ ل واذن يكون الزمن اللازم لقطع المسافة ف فَ = $\frac{\text{قوس ف فَ}}{\text{السرعة فى ف}}$ عند النهاية او ان الزمن المذكور يساوى

$$٢\,(\text{ال} - \text{الَ})\sqrt{\frac{\text{اب}}{\text{اهـ}}} \div \text{هـ ل}\sqrt{\frac{٢\text{ج}}{\text{اهـ}}} = \frac{٢\,\text{تَ ل}}{\text{هـ ل}}\sqrt{\frac{\text{اب}}{٢\text{ج}}} = \text{ضعف زاوية ل هـ لَ}\sqrt{\frac{\text{اب}}{٢\text{ج}}}$$

حيث ان $\frac{\text{تَ ل}}{\text{هـ ل}}$ = التقدير الدائرى لزاوية ل هـ لَ عند النهاية اعنى ان الزمن اللازم لقطع اى قوس صغير مثل ف فَ يتغير تبعا للتقدير الدائرى لزاوية ل هـ لَ

وحينئذ اذا جمعنا الازمان الصغيرة المتتالية المبتدئة من نقطة ع يحصل الزمن اللازم لقطع المسافة ع ف ولكن مجموع الزوايا المقابلة للزمن المذكور هو زاوية ع هـ ل وحينئذ فزمن قطع المسافة

$$\text{ع ف} = \text{زاوية ع هـ ل}\sqrt{\frac{٢\text{اب}}{\text{ج}}}$$

وينتج من ذلك اولا حينما تأتى ف فى ا فان الزاوية ع هـ ل تصير ع هـ ا = $\frac{\text{ط}}{٢}$ واذن فزمن قطع المسافة من ع الى ا يساوى $\frac{\text{ط}}{٢}\sqrt{\frac{٢\text{اب}}{\text{ج}}}$

وبعد ان يأتى المتحرك فى ا يصعد على النصف الآخر ا ء من المنحنى السكلويدى الى ان يصل الى نقطة عَ بحيث يكون اعَ = اع وزمن الصعود على اعَ يكون مساويا الى زمن النزول على اع وعليه يكون زمن الرجة الكاملة من ع الى عَ مساويا الى

$$\text{ط}\sqrt{\frac{٢\text{اب}}{\text{ج}}}$$

وثانيا حيث ان زمن الرجة فى المنحنى السكلويدى لا يتعلق بوضع النقطة التى تبتدى منها الحركة فان الزمن

يكون ثابتا مهما كان مقدار قوس الرجة وبعبارة أخرى ان المنحنى السكلويدى هو منحنى الازمنة المتساوية

وثالثا اذا وضع منحنيان سكلويديان ى ح ١ ى و شكل ٤٣ متماسان معا فى نقطة ى بحيث يكون المماس المشترك رأسيا ثم ثبت طرف خيط مساو لطول احدهما فى نقطة ى وربط فى الطرف الآخر نقطة مادية فأن هذه النقطة ترتج فى المنحنى السكلويدى ح ١ ء بنفس الكيفية التى ترتج بها نقطة مادية مطلقة على منحنى سكلويدى مادى ح ١ ء

فاذا كان ل رمزا لطول الخيط المذكور أعنى لطول البندول يكون ل = ١ى = ٢ ١ب ويكون زمن الرجة من سكون الى آخر مساويا الى $ط\sqrt{\frac{ل}{ح}}$

واذن ففى المحل الواحد من سطح الأرض يتغير زمن الرجة بالنسبة لجذر طول البندول اى بالنسبة الى $\sqrt{ل}$

ورابعا اذا أخذ جزء صغير جدا من المنحنى السكلويدى من ابتداء ١ شكل ٤٣ فنرى ان هذا الجزء يتحد بتقريب كاف مع جزء من الدائرة المارة بنقطة ١ التى نصف قطرها ١ى ومركزها نقطة ى

وحينئذ اذا ارتج بندول طوله ل على قوس دائرى ذى سعة صغيرة جدا وكافية لحصول الرجة فأن زمن الرجة يساوى

$$ط\sqrt{\frac{ل}{ح}}$$

وخامسا اذا كان ل رمزا لطول بندول الثوانى اى البندول الذى يمر من السكون الى السكون فى ثانية ، لَ رمزا لطول بندول يرتج رجة واحدة فى ثوانى عددها ن اى زمن رجة ن من الثوانى يكون

$$١ = ط\sqrt{\frac{ل}{ح}} \quad ، \quad ن = ط\sqrt{\frac{لَ}{ح}}$$

ومنها يحدث $لَ = ن^{٢} ل$

طول بندول الثوانى ـ طول بندول الثوانى فى عرض لندره وجد بالتجربة انه يساوى ٣٩٫١٣٨٦ بوصة ومن مقدار الطول ل هذا يمكن ايجاد مقدار عجلة التثاقل لأن

$$١ = ط\sqrt{\frac{ل}{ح}}$$ ومنها يحدث

$$ح = ط^{٢} ل = ٢٨٦٫٠٨ \text{ بوصة} = ٣٢٫١٩ \text{ قدم}$$

وينتج من ذلك انه اذا كان ح ، حَ عجلتى التثاقل فى محلين مختلفين ١ ، ب من سطح الأرض فيهما يرتج البندول رجات (اى يدق دقات) عددها ن ، نَ على التناظر فى زمن معين فمن السهل المقارنة بين ح ، حَ بدلالة ن ، نَ

وذلك لأنه اذا كان ر هو الزمن المعلوم يكون

$$\frac{ر}{ن} = ط\sqrt{\frac{ل}{ح}} \quad ، \quad \frac{ر}{نَ} = ط\sqrt{\frac{ل}{حَ}}$$

ومنها يحدث

$$\left(\frac{نَ}{ن}\right)^{٢} = \frac{حَ}{ح} \quad \text{أو}$$

$$\frac{حَ-ح}{ح} = \frac{نَ^{٢}}{ن^{٢}} - ١ = \frac{نَ^{٢}-ن^{٢}}{ن^{٢}} = \frac{نَ-ن}{ن} \times \frac{نَ+ن}{ن} = ٢ \times \frac{نَ-ن}{ن}$$ تقريبا اذا كان نَ-ن صغيرا جدا بالنسبة الى ن

الى ن

اذا أخذ بندول الثوانى الى قمة جبل ارتفاعه هـ وكان المطلوب ايجاد مقدار عدد الدقات التى يفقدها هذا البندول فى يوم يقال

نفرض ان عجلة التثاقل تتغير على حسب عكس مربع البعد من مركز الأرض ونرمز لنصف قطر الارض بالرمز نق ولعجلتى التثاقل فى سفح الجبل وفى قمته بالرمزين ج ، جَ على التناظر وحينئذ يكون

$$\text{جَ} = \text{ج} \times \frac{\text{نق}^2}{(\text{نق} + \text{هـ})^2}$$

فاذا كان ز ، زَ هما زمنا الرجة فى سفح الجبل وفى قمته على التناظر يكون

$$\text{ز} = \text{ط}\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ج}}} \quad ، \quad \text{زَ} = \text{ط}\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{جَ}}}$$

واذا كان ن ، نَ عدد الدقات فى زمن واحد فى سفح الجبل وفى قمته على التناظر يكون

$$\text{ن ز} = \text{نَ زَ}$$ ومنها يحدث

$$\frac{\text{ن}}{\text{نَ}} = \frac{\text{زَ}}{\text{ز}} = \sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{جَ}}} = \frac{\text{نق} + \text{هـ}}{\text{نق}} = 1 + \frac{\text{هـ}}{\text{نق}}$$ أو

$$\frac{\text{ن} - \text{نَ}}{\text{ن}} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{\text{هـ}}{\text{نق}}} = \frac{\text{هـ}}{\text{نق}}$$ تقريباً

فاذا كان هـ = ميلا واحدا ، نق = ٤٠٠٠ ميل ، ن = ٢٤ × ٦٠ × ٦٠ يكون

$$\text{ن} - \text{نَ} = \frac{24 \times 60 \times 60}{4000} = 21{,}6$$

أعنى بندول الثوانى يفقد فى هذه الحالة نحو ٢١,٦ دقة فى ٢٤ ساعة

فى العجلة المماسة والعمودية والكلية فى التحرك المنحنى

متى كان تحرك نقطة منحنيا فاتجاه سرعتها يتغير فى كل لحظة فضلا عن تغير مقدارها وحينئذ يقتضى ان نعتبر خلاف العجلة فى اتجاه المماس التى تسمى بالعجلة المماسة عجلة اخرى فى اتجاه الخط العمودى تسمى بالعجلة العمودية ثم عجلة ثالثة تسمى بالعجلة الكلية ولتوضيح ذلك فنقول

اذا فرض ان م ، مَ شكل ٨٥ وضعان متتاليان قريبان جدا من بعضهما للمتحرك على خط سيره م ل مطابقان للزمنين ز ، زَ اللذين لا يفترقان عن بعضهما الا بمقدار يسير جدا ورمزنا لسرعة المتحرك فى الوضع م على اتجاه المماس م ك بالرمز ع ولسرعته فى الوضع مَ على اتجاه المماس مَ كَ بالرمز عَ فيمكن تحليل السرعة عَ الى سرعتين بحيث تكون احداهما مساوية وموازية للسرعة ع ولتكن السرعة الأخرى مَ حـ = عً

ثم نحلل السرعة عً الى سرعتين احداهما على اتجاه المماس مَ كَ ولتكن مَ ى = عٍ والأخرى على اتجاه الخط العمودى

شكل ٨٥

مَ ہ للمنحنى فى نقطة مَ ولكن مَ ء = عً

وحيث ان زاوية امَ ب أو مَ ب ھ صغيرة جدا بقدر مايراد بسبب قرب نقطة مَ من نقطة م بقدر مايراد فالخط العمودى ھ ى لايفرق الا بمقدار صغير جدا بقدر مايراد عن قوس الدائرة الذى مركزه ب ونصف قطره ب ھ وحينئذ يكون ب ى = ب ھ = مَ ٢ = ع

ولكن مَ ب = ب ى + مَ ى من الشكل حينئذ يكون

مَ ب = عَ = ع + عً

واذا رمزنا للزمن الصغير جدا الذى هو الفرق بين ن ، نَ بالرمز ـ يكون

$$\frac{\text{عً}}{\text{ـ}} = \frac{\text{عَ} - \text{ع}}{\text{ـ}}$$ وبأخذ نهاية الطرفين يكون

$$\text{نها}\ \frac{\text{عً}}{\text{ـ}} = \text{نها}\ \frac{\text{عَ} - \text{ع}}{\text{ـ}}$$

أعنى أن نها $\frac{\text{عً}}{\text{ـ}}$ عبارة عن النهاية التى تميل اليها النسبة بين ازدياد السرعة المماسة وبين ازدياد الزمن ـ المستعمل لحصول هذه الزيادة وهى ما تسمى بالعجلة المماسة

وحينئذ فالنهاية التى تميل اليها النسبة $\frac{\text{عً}}{\text{ـ}}$ تسمى بالعجلة العمودية والنهاية التى تميل اليها النسبة $\frac{\text{عً}}{\text{ـ}}$ تسمى بالعجلة الكلية أى ان

نها $\frac{\text{عً}}{\text{ـ}}$ تسمى بالعجلة المماسة

نها $\frac{\text{عً}}{\text{ـ}}$ تسمى بالعجلة العمودية

نها $\frac{\text{عً}}{\text{ـ}}$ تسمى بالعجلة الكلية

الارتباط الواقع بين العجلة المماسة والعمودية والكلية

أولا من حيث ان العجلة المماسة هى نهاية نسبة ازدياد السرعة ع على ازدياد الزمن ـ فتكون هى المشتقة برتبة أولى للسرعة بدلالة الزمن

ويفهم من ذلك ان العجلة المماسة فى التحرك المنحنى هى عين العجلة فى التحرك المستقيم

وثانيا اذا كان م ہ هو العمودى للمنحنى فى نقطة م فمثلث م مَ ہ يمكن اعتباره كمثلث مستقيم الاضلاع وحينئذ يكون مثلث ھ ى ب مشابها لمثلث م مَ ہ بسبب تعامد اضلاعهما ومنها يحدث

ھ ى : ى ب :: م مَ : مَ ہ ومنه يحدث

$$\frac{\text{ھ ى}}{\text{ـ}} = \text{ع} \times \frac{\text{م مَ}}{\text{ـ}} \div \text{مَ ہ}$$ أو

$$\text{نها}\ \frac{\text{ھ ى}}{\text{ـ}} = \text{ع}\ \text{نها} \left(\frac{\text{م مَ}}{\text{ـ}} \div \text{مَ ہ} \right)$$

ولكن عند النهاية $\frac{\text{م مَ}}{\text{ـ}} = \text{ع}$ ، مَ ہ يؤول الى ما يسمى بنصف قطر الانحنا الذى يرمز له بالرمز خ وحينئذ يكون

$$\text{نها}\ \frac{\text{ھ ى}}{\text{ـ}} = \frac{\text{ع}^2}{\text{خ}}$$

وحيث ان

وحيث ان نها $\frac{حى}{ءن}$ = نها $\frac{مك}{ءن}$ = نها $\frac{ع''}{ءن}$ = العجلة العمودية فاذا رمز للعجلة العمودية المذكورة بالرمز $و_1$ يكون

$$و_1 = \frac{ع^2}{نق}$$

اعني ان العجلة العمودية تساوى خارج قسمة مربع سرعة المتحرك على نصف قطر انحناء خط السير

وثالثا من مثلث م ح ى القائم الزاوية في ى يحدث

$$\overline{مح}^2 = \overline{مى}^2 + \overline{حى}^2 \quad \text{أو}$$

$$\left(\frac{مح}{ءن}\right)^2 = \left(\frac{مى}{ءن}\right)^2 + \left(\frac{حى}{ءن}\right)^2$$

وبأخذ نهاية الطرفين يحدث

$$نها\left(\frac{مح}{ءن}\right)^2 = نها\left(\frac{مى}{ءن}\right)^2 + نها\left(\frac{حى}{ءن}\right)^2 \quad \text{أو}$$

$$نها\left(\frac{ع''}{ءن}\right)^2 = نها\left(\frac{ع'}{ءن}\right)^2 + نها\left(\frac{ع'''}{ءن}\right)^2 \quad \text{ولكن}$$

حيث ان نها $\left(\frac{ع''}{ءن}\right)^2$ عبارة عن مربع العجلة الكلية ، نها $\left(\frac{ع'}{ءن}\right)^2$ عبارة عن مربع العجلة المماسة ونها $\left(\frac{ع'''}{ءن}\right)^2$ عبارة عن مربع العجلة العمودية فحينئذ اذا رمزنا للعجلة الكلية بالرمز ك وللعجلة المماسة بالرمز و يكون

$$ك^2 = و^2 + و_1^2$$

أعني ان العجلة الكلية يمكن حسابها كوتر مثلث قائم الزاوية أحد ضلعيه المحيطين بالقائمة العجلة المماسة والضلع الآخر العجلة العمودية

وينتج من ذلك اولا حينما تكون العجلة العمودية معدومة فالعجلة الكلية تساوى العجلة المماسة ولكن حيث كانت العجلة العمودية تساوى $\frac{ع^2}{نق}$ فحينئذ انعدامها لايقع الا اذا كانت السرعة ع معدومة بالكلية أعني انه لا يوجد تحرك أصلا أو ان نصف قطر الانحناء نق يكون مقداره الى ما لا نهاية له أعني ان خط السير يكون خطا مستقيما وحيث انه لايجوز انعدام السرعة بوجود الحركة فحينئذ انعدام العجلة العمودية يدل على أن خط السير مستقيم

وثانيا حينما تكون العجلة الكلية ثابتة المقدار والاتجاه لخط السير يكون قطعا مكافئا لأنه اذا اعتبرنا اتجاه السرعة الابتدائية ع محور السينات واتجاه العجلة الكلية محور الصادات فبفرض انعدام العجلة الكلية المذكورة يتحرك المتحرك على اتجاه محور السينات تحركا منتظما ويكون

$$س = ع ن$$

واذا كان الأمر بالعكس بأن كانت العجلة الكلية هي الموجودة فقط فالمتحرك يتحرك على اتجاه محور الصادات تحركا منتظم العجلة ويكون

$$ص = \frac{1}{2} ك ن^2$$

وبوجود هاتين الحركتين في آن واحد بسبب وجود السرعة الابتدائية والعجلة الكلية معا يمكن

لحصول على خط السير بحذف ن من المعادلتين المذكورتين وحينئذ يحدث

$$ص = \frac{ك}{٢ع^{٢}} \times س^{٢}$$

وهي معادلة قطع مكافئ منسوب الى المماس والى القطر الذي يمر بنقطة التماس

الضغط على منحنى — اذا تحركت نقطة مادية على منحنى سكلويدي محوره رأسي شكل ٥٣ بتأثير التثاقل وكان المطلوب ايجاد الضغط على المنحنى المذكور يقال

اذا فرض ان م هو جسم المتحرك السائر على تقعير المنحنى وان ر هو رد الفعل او الضغط الذي يحدثه المنحنى المادي على المتحرك المذكور في جهة التقعير المساوي للضغط الذي يحدثه ذلك المتحرك على المنحنى في الجهة المضادة يكون $\frac{ر}{م}$ هو العجلة الناشئة عن هذا الضغط واذا رمزنا بالرمز هـ للزاوية التي يكونها العمودي للسطح مع الخط الرأسي لمن حيث ان قوة التثاقل تؤثر الى أسفل فيكون حـ حاهـ هي محللة عجلة التثاقل المؤثر في اتجاه هـ ك ا $\frac{ر}{م}$ ـ حـ حاهـ هو مقدار العجلة الكلية المؤثرة في اتجاه العمودي للسطح ولكن من حيث ان المقدار المذكور عبارة عن العجلة العمودية التي مقدارها بموجب ما تقدم هو $\frac{ع^{٢}}{ج}$ فيكون

$$\frac{ع^{٢}}{ج} = \frac{ر}{م} - ح\ حاهـ$$ ومنها يحدث

$$ر = م\left(\frac{ع^{٢}}{ج} + ح\ حاهـ\right)$$

وهي المعادلة المطلوبة التي يتعين منها مقدار الضغط على المنحنى

وينتج من ذلك أولا اذا رسم المتحرك منحنيا سكلويديا بربطه بخيط كما تقدم فشدة الخيط الواقعة على المتحرك تكون مساوية للضغط على المنحنى اي ان شدة الخيط في اي وضع مثل ى ك هـ شكل ٥٢ تكون مساوية الى $م\left(\frac{ع^{٢}}{ج} + ح\ حاهـ\right)$

وثانيا اذا تحرك متحرك على منحنى ما بتأثير أي قوة وكان ص رمز المحللة العجلة في اتجاه العمودي على السطح معتبرة موجبة في جهة التقعير فبناء على ما تقدم يكون

$$ر = م\left(\frac{ع^{٢}}{ج} - ص\right)$$

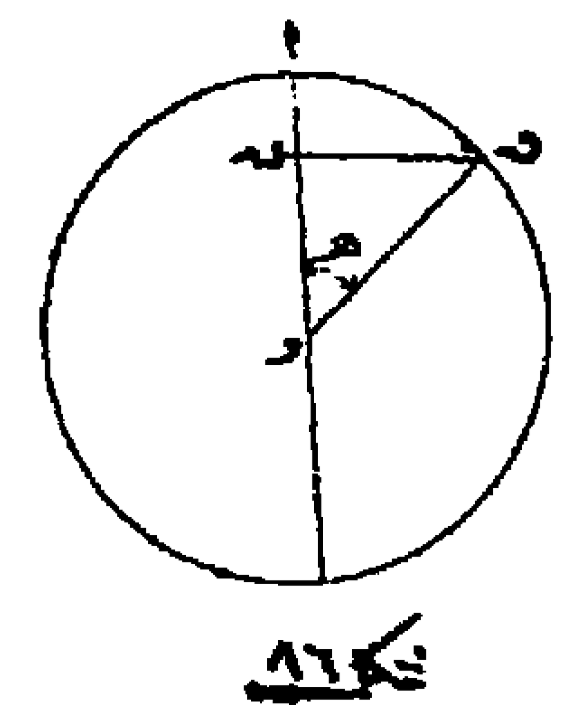
وثالثا حيث ان المنحنى يحدث قوة دفع فقط على المتحرك فاذا صار مقدار ر سالبا في حالة ما (بمعنى ان المنحنى يحدث قوة جذب) فان المتحرك يترك المنحنى في النقطة التي فيها ر = ٠ لانه متى مر الجسم من هذه النقطة فان مقدار ر تتغير اشارته من الايجاب الى السلب

فاذا كان المتحرك مارا في انبوبة منحنية قطرها الداخل صغير جدا بدلا من تحركه على منحنى بسيط فان اتجاه الضغط الذي تحدثه الانبوبة على المتحرك يتغير في نقطة مثل النقطة السابقة بمعنى أنه اذا كان المتحرك في احد جانبي النقطة فان الضغط يؤثر في جهة تقعير المنحنى واذا كان المتحرك في الجهة الأخرى من النقطة المذكورة فان الضغط يؤثر في جهة تحديب المنحنى وبالعكس

ولنوضح

ولنوضح القواعد المتقدمة بالمسألتين الآتيتين فنقول

المسألة الأولى ـ متحرك نازل من السكون على قوس من دائرة رأسية ملسا والمطلوب معرفة الوضع الذى يترك فيه المتحرك المذكور تلك الدائرة


شكل ٨٦

لذلك نفرض ان ع هى سرعة المتحرك فى وضع ما مثل ء شكل ٨٦ حينما ينزل على الدائرة وأن و ا هو اتجاه القطر الرأسى ا و هو المركز ا ه هو نصف القطر الرأسى ثم نمد ء ه أفقيا ونفرض ان زاوية ء و ا = هـ وان ر هو الضغط الحادث من المحيط على المتحرك المائل لابعاد المتحرك المذكور عن نقطة و وحينئذ يكون

ع^٢ = ٢ ء × ا ه

حيث أن المتحرك خارج من السكون من نقطة ا ومن حيث ان نصف قطر الانحناء واحد فى كل نقطة ويساوى ق فيكون ع^٢/ق هو مقدار العجلة فى نقطة ء فى الاتجاه ء و ولكن حيث ان ء جتا هـ هو محصلة عجلة التثاقل فى الاتجاه ء و فيكون ء جتا هـ ـ ر/م هى العجلة الكلية للمتحرك الحاصلة فى الاتجاه ء و وحينئذ

ع^٢/ق = ء جتا هـ ـ ر/م ومنها يكون

ر = م (ء جتا هـ ـ ع^٢/ق)

وحيث ان ع^٢ = ٢ ء × ا ه = ٢ ء ق (١ ـ جتا هـ) فيكون

ر = م ء (٣ جتا هـ ـ ٢)

ومن هذه المعادلة يتعين مقدار الضغط فى اى نقطة مثل ء ومتى كان جتا هـ اكبر من ٢/٣ يكون ر موجبا ويبقى المتحرك مماسا للمنحنى ولكن متى زاد هـ بحيث يصير جتا هـ أصغر من ٢/٣ فان ر يصير سالبا ويلزم ان يحدث عن المنحنى قوة جذب لكى يبقى المتحرك ملاصقا له وحينئذ ففى النقطة التى فيها جتا هـ = ٢/٣ تتغير اشارة ر من الايجاب الى السلب ويترك المتحرك المنحنى ولكن فى النقطة التى فيها جتا هـ = ٢/٣ يكون ا ه = ١/٣ ق

وبعد ان يترك المنحنى المذكور يبتدى فى رسم منحنى قطع مكافئ

المسألة الثانية ـ متحرك يدور فى مستو رأسى مربوط فى طرف خيط غير مرن طرفه الآخر ثابت والمطلوب ايجاد مقدار الشد الواقع على الخيط المذكور فى وضع ما وتعيين الشروط اللازمة لأجل ان يرسم المتحرك محيطا كاملا

لذلك نفرض ان و شكل ٨٦ هى الطرف الثابت للخيط الذى طوله = ق ا ء وضع المتحرك حينما يكون الخيط ء و صانعا مع الرأسى و ا زاوية قدرها هـ وحينئذ يكون

ا ه = ق (١ ـ جتا هـ)

واذا فرض أن ش ومز لشد الخيط حينما يكون المتحرك في نقطة ن وأن ع، ع هما السرعتان حينما يكون المتحرك في انه على التناظر يكون $ع^٢ = ع_٢^٢ + ٢ حـ × ا ن = ع_٢^٢ + ٢ حـ نق (١ - حتا هـ)$

وحيث ان عجلة شد الخيط في الاتجاه ن و هي $\frac{ش}{م}$ ومحصلة عجلة التثاقل في الاتجاه ن و المذكور هي حـ حتا هـ فيكون $\frac{ش}{م}$ + حـ حتا هـ هو مقدار العجلة الكلية في اتجاه ن و وعليه يكون

$$\frac{ش}{م} + حـ حتا هـ = \frac{ع^٢}{نق} = \frac{ع_٢^٢}{نق} + ٢ حـ (١ - حتا هـ)$$

ومنها يحدث

$$ش = م \left[\frac{ع_٢^٢}{نق} + حـ (٢ - ٣ حتا هـ)\right]$$

وهي المعادلة التي يتعين منها مقدار شد الخيط في اي وضع كان

ويرى من ذلك ان مقدار ش يكون نهاية صغرى حينما يكون حتا هـ = ١ اعني حينما تكون هـ = ٠ أي عندما تكون نقطة ن في نقطة ا ثم يأخذ مقدار ش في الازدياد بازدياد هـ الى ان تكون هـ = ط اي حينما يكون المتحرك في أوطى نقطة وحينئذ يكون مقدار ش نهاية عظمى

ولاجل ان يرسم المتحرك محيطا كاملا يجب ان لا يكون شد الخيط سالبا ابدا اذ ان في هذه الحالة يكون الخيط غير مشدود فاذا جعلنا أصغر مقادير ش مساويا للصفر اي جعلنا ش = ٠ حينما يكون هـ = ٠ يكون

$$\frac{ع_٢^٢}{نق} + حـ (٢ - ٣) = ٠ \quad \text{ومنها يحدث}$$

$$ع_٢^٢ = حـ نق \quad \text{أو} \quad ع_٢ = \sqrt{حـ نق}$$

ومن هذه المعادلة يتعين مقدار السرعة الأصغر ما يمكن للمتحرك في وضعه الأعلى ما يكون حتى يمكن ان يرسم محيطا كاملا

وحيث ان السرعة الاكبر ما يمكن تكون في النقطة المسفلى فاذا كان $ع_٢ = \sqrt{حـ نق}$ يكون مقدار السرعة العظمى مساويا الى $\sqrt{٥ حـ نق}$

وعلى هذا تكون المعادلة التي يتعين منها مقدار شدة الخيط هي ش = ٣ م حـ (١ - حتا هـ)

وحيث ان النهاية العظمى لهذا المقدار تحقق حينما يكون حتا هـ = -١ اعني حينما يكون المتحرك في أوطى نقطة فتكون قوة الشد في هذه الحالة مساوية الى

$$٦ م حـ = ٦ \times \text{ثقل المتحرك}$$

وبناء على ما ذكر يرى انه لاجل ان يرسم المتحرك محيطا كاملا يلزم تحقق الشرطين الآتيين

أولا ان لا تكون السرعة في أوطى نقطة اصغر من $\sqrt{٥ حـ نق}$

وثانيا ان الخيط يمكن ان يحمل شدا مساويا لستة امثال ثقل المتحرك على الأقل

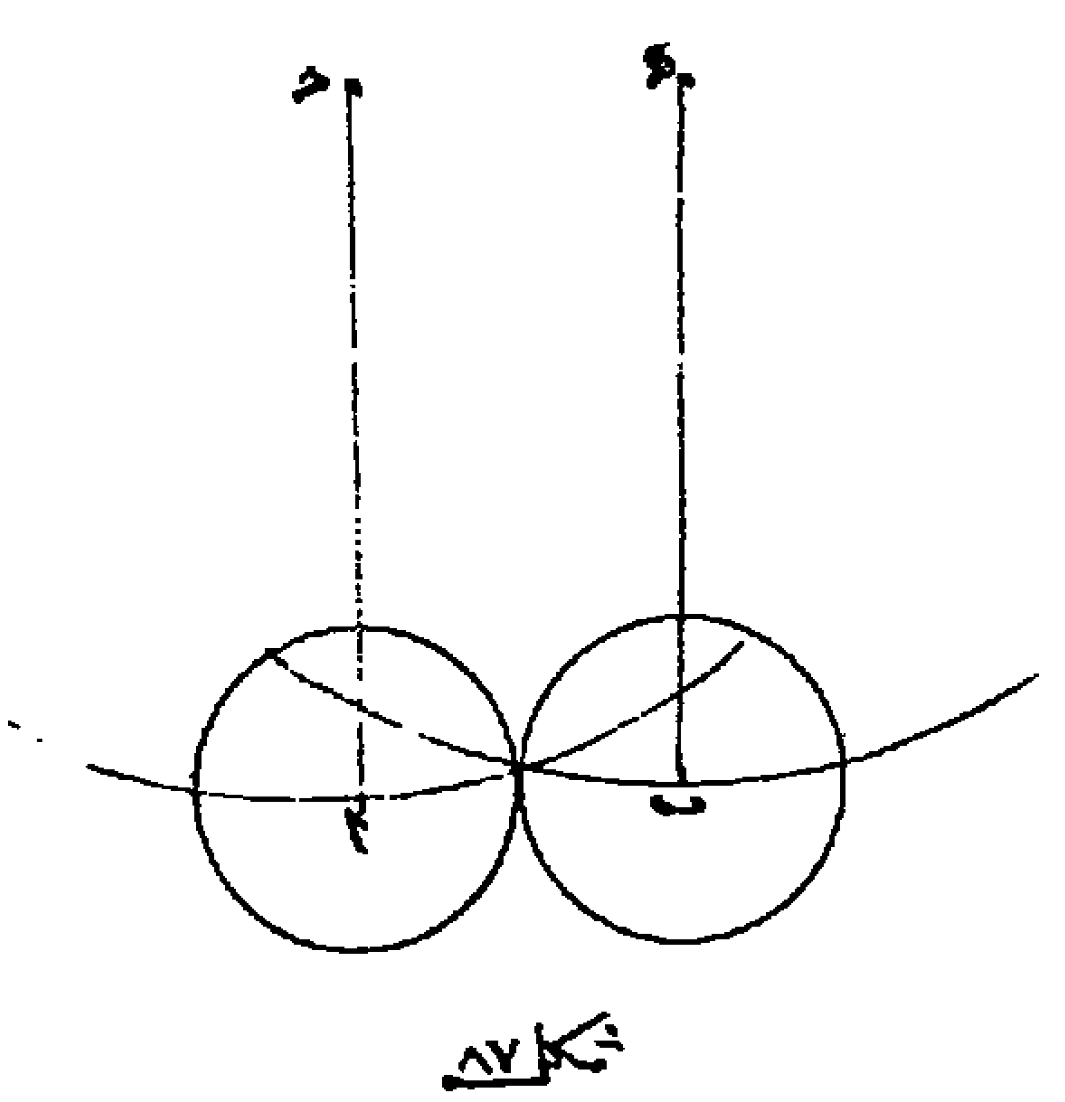
طريقة نوتون لتعيين مرونة الكرات

قد استعمل نوتون لتعيين مرونة المواد المختلفة الطريقة الآتية وهي

أنه علق كرتين ا ، ب شكل ٨٧ في نقطتين ثابتتين حـ ، ء بخيطين متوازيين وجعلهما متماسين

في نهايتي

في نهايتي قطرين افقيين
وحينئذ اذا اخرجت الكرتان عن الوضع الرأسي بمقدار قوسين معلومين فأن السرعتين اللتين تتصادم بهما الكرتان المذكورتان يمكن ايجادهما كما تقدم (بموجب النتيجة الثالثة من التنبيه المذكور في مبحث التحرك على منحني)



شكل ٨٧

وبواسطة توضيب هذين القوسين بطريقة مناسبة يمكن ان تتصادم الكرتان في أوطى وضع لهما وبالاحظة القوسين اللذين ترسمهما الكرتان المذكورتان ثانيا يمكن تعيين السرعتين اللتين ينفصلان بهما بعد التصادم ويمكن بناء على ذلك تعيين معامل المرونة

وبتجارب من هذا القبيل وجد المعلم نوتون ان معامل مرونة الكرات المجدولة من الصوف هو $\frac{5}{9}$ والكرات التي من الصلب نحو ذلك تقريبا والكرات التي من الفلين أقل من ذلك بقليل والعاج $\frac{8}{9}$ والزجاج $\frac{15}{16}$ وقد ذكر انه يلزم تصليح هذه المعاملات من الخطأ الحاصل من مقاومة الهواء
ثم اذا اخرجت الكرة ب من وضعها الاصلي وتركت لتصدم الكرة ا الساكنة فأن سرعة كل منها بعد التصادم تكون عين السرعة التي تحصل بناء على القواعد التي ذكرت في مبحث التصادم
واذا فرض ان الكرتين كانتا من خشب وكان بأحداهما عنصر صغير من الصلب يلمس كرة ا بعد التصادم فبتعديل القوسين اللذين تخرج بهما الكرتان يمكن اعطاء الكرتين المذكورتين عند التصادم سرعتين مناسبتين لعكس حجمهما وبواسطة تحميل احداهما بالرصاص يمكن جعل النسبة بين حجميهما حسب الارادة وعليه فتبقى الكرتان في سكون بعد التصادم ويفهم من ذلك ان كميتي التحرك المتساويتين والمختلفتي الجهة يتماحيان معا

والى هنا تم طبع اللازم تدريسه لتلامذة السنة الثانية من مدرسة المهندسخانة الخديوية على حسب البروجرام وعلى الله حسن الاتكال

